

Кривые и поверхности

А. П. Ульянов

3–16 марта 2008 г.

В этом тексте я собираюсь передать краткие теоретические сведения по кривым и поверхностям в пространстве, которых в основном касаюсь на семинарах. Детальное изложение доступно в рекомендованном учебнике Рашевского.

Кривые в пространстве

Способы задания

Точки будем задавать координатами (x, y, z) или радиус-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Параметрический способ задания кривой наиболее актуален, но иногда кривая возникает в неявном виде как пересечение двух поверхностей.

Способ	Смысл	Формула
Параметрический	Координаты выражены через одну независимую переменную	$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$
Неявный	Координаты связаны уравнениями	$F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0$

Используемые функции должны быть разумными с точки зрения анализа, а именно, достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми. Также в анализе обсуждаются техника переходов между различными способами задания и возникающие тонкости. Бывает и так, что кривая задана по-разному на своих отдельных участках, называемых обычно *кусками*.

Естественный параметр

Необходимо различать понятия кривой как геометрического множества точек и параметризованной кривой; последнее ближе к понятию траектории движущейся точки. Геометрическая кривая может быть параметризована разными способами, что соответствует прохождению одной траектории с разными скоростями, а также в двух противоположных направлениях (выбор ориентации кривой).

Если физически естественным параметром часто является время, то для математического исследования кривой чаще удобна длина дуги, то есть длина пути, пройденного от начальной точки. Обозначим её через s . Этот параметр соответствует постоянной по модулю (единичной) скорости движения, что заметно упрощает формулы и теоретические вычисления. При произвольном параметре u длина дуги находится по формулам

$$ds = |\mathbf{r}'(u)| du, \quad s(b) - s(a) = \int_a^b |\mathbf{r}'(u)| du.$$

Сопровождающий трёхгранник

Для произвольного ненулевого вектора $\mathbf{a}$ обозначим через $\mathbf{e}(\mathbf{a})$ единичный вектор в направлении $\mathbf{a}$. Фиксируя на параметризованной кривой точку $\mathbf{r}(u)$, определим взаимно ортогональные единичные векторы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{e}(\mathbf{r}'), & \text{— вектор касательной,} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{b} \times \mathbf{t}, & \text{— вектор главной нормали,} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{e}(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') & \text{— вектор бинормали} \end{aligned} \right\} \text{ к данной кривой в выбранной точке.}$$

Здесь необходимо иметь $\mathbf{r}'(u) \times \mathbf{r}''(u) \neq \mathbf{0}$; смысл этого ограничения укажем позже. Векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ составляют базис особой (подвижной) декартовой системы координат с началом в выбранной точке кривой, называемый **репером Френе**.

Упражнение 1. Проверьте, что (при ограничении $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}$) репер Френе зависит не от параметризации кривой, а лишь от направления её прохождение.

Термины **касательная**, **главная нормаль** и **бинормаль** применяют к прямым, проходящим через выбранную точку кривой в направлениях векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$. Полезны также три плоскости, проходящие через пару этих прямых ортогонально третьей:

Плоскость	Ортогональна	Содержит
Нормальная	$\mathbf{t}$	$\mathbf{n}, \mathbf{b}$
Спрямяющая	$\mathbf{n}$	$\mathbf{b}, \mathbf{t}$
Соприкасающаяся	$\mathbf{b}$	$\mathbf{t}, \mathbf{n}$

Движение сопровождающего трёхгранника

При движении точки $\mathbf{r}(u)$ вдоль кривой переменные векторы репера Френе остаются единичными и взаимно ортогональными:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(u) \cdot \mathbf{t}(u) &= 1, & \mathbf{n}(u) \cdot \mathbf{b}(u) &= 0, \\ \mathbf{n}(u) \cdot \mathbf{n}(u) &= 1, & \mathbf{b}(u) \cdot \mathbf{t}(u) &= 0, \\ \mathbf{b}(u) \cdot \mathbf{b}(u) &= 1, & \mathbf{t}(u) \cdot \mathbf{n}(u) &= 0. \end{aligned}$$

Весь трёхгранник движется как твёрдое тело; его движение раскладывается на поступательное движение его вершины $\mathbf{r}(u)$ относительно неподвижной системы координат и вращение репера $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ вокруг вершины.

Скорости движения векторов репера выражаются через сами векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$. Дифференцируя указанные постоянные скалярные произведения и опуская параметр u , получим выражения вида

$$2\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0, \quad \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}' = 0.$$

Эти сведения можно собрать в (формальное) матричное равенство

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_3 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ -k_3 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

с неизвестными пока функциями $k_i(u)$. Бинормаль по определению ортогональна как скорости $\mathbf{r}'$, так и ускорению $\mathbf{r}''$, а производная вектора $\mathbf{t} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ есть линейная комбинация $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$. Значит, $k_3(u) \equiv 0$. Оставшиеся две функции могут быть какими угодно.

Теперь выберем длину дуги s в качестве параметра; производные по s обычно обозначают точками сверху. В этом случае вместо k_1 и k_2 пишут $k = k(s)$ и $\kappa = \kappa(s)$. Эти функции называют соответственно **кривизной** и **кручением** данной кривой в точке $\mathbf{r}(s)$. Они являются скоростями вращения соответственно касательной вокруг бинормали и бинормали вокруг касательной. Наше матричное равенство эквивалентно **формулам Френе — Серре**:

$$\dot{\mathbf{t}} = k \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \kappa \mathbf{b} - k \mathbf{t}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\kappa \mathbf{n}.$$

Вектор $k \mathbf{n}$ называют **вектором кривизны** кривой в точке.

Мгновенную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}(s)$ вращения репера Френе называют **вектором Дарбу**. При этом каждый вектор $\mathbf{a}$, имеющий постоянные координаты относительно подвижного репера $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, изменяется относительно неподвижного репера $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ по формуле $\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$. Подставляя сюда векторы $\mathbf{a} = \mathbf{n}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{t}$, находим выражение $\boldsymbol{\omega} = \kappa \mathbf{t} + k \mathbf{b}$ для вектора Дарбу.

Упражнение 2. Найдите координаты векторов $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\ddot{\boldsymbol{\omega}}$ и $\ddot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega}$ в базисе $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

В курсе дифференциальных уравнений доказывается теорема Пикара о существовании и единственности решения системы линейных (обыкновенных дифференциальных) уравнений. Благодаря ей формулы Френе — Серре гарантируют, что вместе с начальным положением репера Френе кривизна и кручение как функции длины дуги однозначно задают кривую в пространстве.

Вычисление кривизны и кручения

Вычислим кривизну при произвольной параметризации $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$. Будем обозначать $|\mathbf{r}'(u)|$ через v . Цепное правило для производных даёт $\mathbf{t}' = \frac{ds}{du} \dot{\mathbf{t}} = v \dot{\mathbf{t}} = kv \mathbf{n}$, откуда $\mathbf{t} \times \mathbf{t}' = kv \mathbf{b}$. Сравнивая это с результатом (Упражнение 1) прямого вычисления $\mathbf{t} \times \mathbf{t}' = v^{-2} \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = v^{-2} |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| \mathbf{b}$, получаем

$$k = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}.$$

При $u = s$ формула упрощается до $k = |\ddot{\mathbf{r}}|$, однако на практике переход от исходного параметра к естественному может быть громоздок и такими упрощениями не оправдывается.

Вычислим кручение при произвольной параметризации $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$. Используем несколько раз цепное правило, замалчивая явный вид (весьма несложных) скалярных функций $\alpha(u)$, $\beta(u)$ и $\gamma(u)$, которые всё равно исчезают ввиду свойств смешанного произведения:

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = (v \dot{\mathbf{r}}, \alpha \dot{\mathbf{r}} + v^2 \ddot{\mathbf{r}}, \beta \dot{\mathbf{r}} + \gamma \ddot{\mathbf{r}} + v^3 \dddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} + v^6 (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}).$$

Далее по формулам Френе — Серре находим

$$(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{t}, k \mathbf{n}, \dot{k} \mathbf{n} + k \dot{\mathbf{n}}) = (\mathbf{t}, k \mathbf{n}, \dot{k} \mathbf{n} - k^2 \mathbf{t} + k \kappa \mathbf{b}) = \mathbf{0} + k^2 \kappa (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = k^2 \kappa.$$

Подставляя уже известную формулу для k , получаем

$$\kappa = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}.$$

Кручение является рациональной функцией производных координат, в отличие от кривизны, содержащей квадратный корень при вычислении модулей.

Особые случаи

Выделим четыре особых случая поведения кривой в одной точке или на некотором куске.

Условие	В точке	На куске
$\dot{\omega} = \mathbf{0}$	(Не интересно?)	Винтовая линия
$\kappa = 0$	Точка уплощения	Плоская кривая
$k = 0$	Точка распрямления	Прямая
$\mathbf{r}' = \mathbf{0}$	Нерегулярная точка	—

Условие $\dot{\omega} = \mathbf{0}$ эквивалентно постоянству кривизны и кручения (сделайте упражнение выше). Если $\kappa = 0$ в изолированной точке, то вблизи неё кривая всего лишь более обычного похожа на плоскую. Если $k = 0$ в изолированной точке, то репер Френе там может изменяться скачком, а кручение не определено. В нерегулярной же точке всё может быть достаточно плохо помимо того, что кривизна не определена. В элементарных курсах обычно избегают рассмотрения нерегулярных точек.

Проекция кривой на плоскости трёхгранника

Выберем на кривой точку $P = \mathbf{r}(s)$ и изучим поведение кривой около неё относительно плоскостей сопровождающего трёхгранника. Разложим смещение $\delta = \mathbf{r}(s + \varepsilon) - \mathbf{r}(s)$ по Тэйлору:

$$\delta = \varepsilon \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{6} \varepsilon^3 \dddot{\mathbf{r}} + o(\varepsilon^3).$$

Распишем значения $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$ и $\dddot{\mathbf{r}}$ в точке P в базисе $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Собрав координаты, получим

$$\delta = (\varepsilon + o(\varepsilon)) \mathbf{t} + (\frac{1}{2} k \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)) \mathbf{n} + (\frac{1}{6} k \kappa \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)) \mathbf{b}.$$

При $k \neq 0$ и $\kappa \neq 0$ кривая вблизи точки P похожа на **скрученную параболу** $\mathbf{r}(u) = u \mathbf{t} + \alpha u^2 \mathbf{n} + \beta u^3 \mathbf{b}$.

Плоскость проекции		Модельная кривая	
$\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle$	Соприкасающаяся	$x^2 = y$	Парабола обыкновенная
$\langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle$	Спрямяющая	$x^3 = z$	Парабола кубическая
$\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle$	Нормальная	$y^3 = z^2$	Парабола полукубическая

Проекциями на плоскости трёхгранника тоже будут кривые, походящие на разные параболы. Проекция на соприкасающуюся плоскость имеет в точке P ту же кривизну, что и изучаемая пространственная кривая; проекция на спрямяющую плоскость имеет в P перегиб, и в частности, нулевую кривизну, чем и объясняется название этой плоскости. Направление перегиба соответствует знаку константы β , равному знаку кручения, ибо кривизна кривой в пространстве не бывает отрицательной. В проекции на нормальную плоскость P является точкой возврата.

Порядок соприкосновения

Возьмём какую-то несложную кривую или поверхность F , имеющую с кривой $\mathbf{r}(s)$ общую точку P . Сравним расстояния от другой близкой точки кривой до P и до фигуры F , обозначая их через ε и $\delta(\varepsilon)$ соответственно. Если второе есть бесконечно малое порядка (точно) $n + 1$ относительно первого, $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$, то кривая и фигура имеют в точке P **касание** (точно) n -го порядка.

Касательная прямая и соприкасающиеся плоскость, окружность и сфера выделяются среди фигур своего типа наивысшим порядком соприкосновения с данной кривой в выбранной её точке.

Тип фигуры	n	Специфика фигуры	$\exists!$ при
Прямая	1	Касательная к кривой	$\mathbf{r}' \neq 0$
Плоскость	1	Содержащая касательную	Не единственна
Плоскость	2	Соприкасающаяся	$k \neq 0$
Окружность	2	Соприкасающаяся	$k \neq 0$
Сфера	3	Соприкасающаяся	$\kappa \neq 0$

Соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости; её центр и радиус называются **центром** и **радиусом кривизны**. Радиус есть $R = 1/k$, а центром в подвижной системе координат является $R\mathbf{n}$. Они имеют смысл и для плоских кривых, когда ими и исчерпывается картинка.

Соприкасающаяся окружность является пересечением соприкасающейся сферы и соприкасающейся плоскости. Центр сферы и центр окружности соединяет параллельная $\mathbf{b}$ прямая, называемая **осью кривизны** пространственной кривой в выбранной точке P .

Упражнение 3. Докажите, что вектор из точки касания до центра сферы равен

$$\frac{\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}.$$

Указание: смотрите формулы (295)–(297) в учебнике Рашевского.

Геометрия на поверхности

Способы задания

Как и для кривых, параметрический способ задания остаётся основным, но доминирует слабее, потому что неявный способ тоже нередко приносит простые формулы. Явный способ задания поверхности — частный случай как параметрического, так и неявного.

Способ	Смысл	Формула
Параметрический	Координаты выражены через две независимые переменные	$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$
Явный	Одна из координат выражена через остальные	$z = f(x, y)$
Неявный	Координаты связаны уравнением	$F(x, y, z) = 0$

Теоретической основой перехода от неявного задания к явному является одна из важнейших теорем классического анализа — теорема о неявной функции. В практических вычислениях лишь для небольшого списка типов поверхностей удаётся совершить переход от одного способа задания к другому. Типична ситуация, когда поверхность параметризуется не целиком, а по частям; даже сфера требует выделения не менее двух перекрывающихся кусков.

При изучении параметризованной поверхности постоянно используются частные производные радиус-вектора $\mathbf{r}$ по параметрам, так что для них нужны компактные обозначения. Примем один из стандартных вариантов: $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Вторые частные производные обозначим через $\mathbf{r}_{uu}$, $\mathbf{r}_{uv}$ и $\mathbf{r}_{vv}$.

Некоторые специальные классы

Два класса поверхностей рано вводятся в нашем курсе:

- (а) поверхность вращения образуется вращением плоской кривой в пространстве;
- (б) линейчатая поверхность образуется движением прямой в пространстве.

Поверхности вращения очень важны на практике и составляют значительную часть рассматриваемых и прорешиваемых нами примеров. Сказать того же о линейчатых поверхностях я не берусь, по крайней мере в нашем курсе.

Касательная плоскость и нормаль

Касательным пространством $T_P S$ к поверхности S в точке P называется линейная оболочка касательных векторов к кривым, лежащим на поверхности и проходящим через P . Пример вершины конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ показывает, что размерность касательного пространства может превышать число 2, которое интуиция выдвигает на роль размерности самой поверхности. Точки поверхности, в которых случается такое превышение, называют **особыми** или **сингулярными**, но таковых «мало», и мы очень стараемся их избегать. Остальные точки — **регулярные**.

Нормалью к поверхности S в точке P называют вектор, ортогональный ко всем касательным векторам к S в P . Таким вектором для поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ является $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, а для поверхности $F(x, y, z) = 0$ — градиент $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$.

Если указанные формулы в какой-то точке дают нулевой вектор, она может оказаться особой. При наличии ненулевой нормали в точке P касательное пространство обязательно имеет размерность 2 и называется **касательной плоскостью**, так что P гарантированно регулярна.

Ориентируемость

Вектор нормали удобно брать единичным, но в каждой точке возможно два направления. Выбор направления в близких друг другу точках желательно делать согласованно, что всегда возможно на отдельно взятом параметризованном куске поверхности. Однако при сшивании поверхности из кусков может обнаружиться невозможность согласовать направления нормалей всех кусков. Пример этого явления — лента Мёбиуса. В таком случае поверхность называется **неориентируемой**. Если поверхность ориентируема, то её **ориентацией** называют выбор одного из двух возможных согласований нормалей.

Практически все вопросы о поверхностях, которые затрагивает наш курс, относятся к куску поверхности, поэтому неориентируемые поверхности не рассматриваются.

Первая квадратичная форма

Вследствие выбора параметризации $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ (куска) поверхности, в каждой касательной плоскости появляется выделенный базис $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$. Приращение $d\mathbf{r}$ связано с приращениями du и dv параметров правилом дифференцирования $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$, в чём нетрудно усмотреть запись касательного вектора $d\mathbf{r}$ в базисе $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$.

Первой квадратичной формой или **метрикой** параметризованной поверхности S называют функцию $I = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$. Как правило, она меняется от точки к точке, хотя нередко эту зависимость не указывают в обозначениях. Метрика возникает во всех геометрически важных формулах, связанных с S , поэтому её коэффициентам присвоены устоявшиеся имена:

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v,$$

или в матричном виде

$$(1) \quad \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \end{bmatrix}.$$

Значение функции I на касательном векторе $\xi = \xi_1 \mathbf{r}_u + \xi_2 \mathbf{r}_v$ равно $I(\xi) = \xi \cdot \xi$, то есть

$$I(\xi) = E \xi_1^2 + 2F \xi_1 \xi_2 + G \xi_2^2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Ассоциированную симметричную билинейную форму обозначают той же буквой I , так что для двух векторов $\xi = \xi_1 \mathbf{r}_u + \xi_2 \mathbf{r}_v$ и $\eta = \eta_1 \mathbf{r}_u + \eta_2 \mathbf{r}_v$, касательных в *одной и той же* точке поверхности, имеем значение $I(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$, то есть

$$I(\xi, \eta) = E \xi_1 \eta_1 + F \xi_1 \eta_2 + F \xi_2 \eta_1 + G \xi_2 \eta_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}.$$

Смысл введения метрики в том, чтобы выделить часто повторяющийся в вычислениях фрагмент в статусный объект.

Длины, углы, площади

Конечно, длина касательного вектора ξ равна $\sqrt{\xi \cdot \xi} = \sqrt{I(\xi)}$, а косинус угла между двумя касательными векторами ξ и η в одной точке равен

$$\frac{\xi \cdot \eta}{|\xi| |\eta|} = \frac{I(\xi, \eta)}{\sqrt{I(\xi) I(\eta)}}.$$

Лежащую на поверхности кривую задают параметризацией $u = u(t)$, $v = v(t)$, а тогда элемент ds длины её дуги равен $|\mathbf{r}'(t)| dt = |u'(t)\mathbf{r}_u + v'(t)\mathbf{r}_v| dt$, где штрихи обозначают производные по t , то есть значению

$$\sqrt{E(t)u'(t)^2 + 2F(t)u'(t)v'(t) + G(t)v'(t)^2} dt.$$

Длину куска кривой вычисляют интегрированием этого выражения по dt .

Элемент площади определяется при помощи характеристики модуля векторного произведения как площади параллелограмма, $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$. Тождество $\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2$ позволяет выразить $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ через коэффициенты метрики. В итоге получается формула для вычисления площади куска D поверхности:

$$S(D) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Как видно из приведённых формул, для основных геометрических вычислений на поверхности не обязательно знать её параметризацию! Достаточно знать метрику. Метрика поверхности определяет на ней неевклидову геометрию (евклидов, или плоский, случай имеет метрику $d\mathbf{r}^2 = du^2 + dv^2$ и соответствует единичной матрице). Это первый шаг к полезному представлению о поверхности как «самой по себе», а не как вложенной в привычное 3-мерное евклидово пространство.

Смена параметризации

Один и тот же кусок поверхности можно параметризовать различными способами. Со временем пригодится чёткое понимание закона преобразования метрики при смене параметризации. Итак, при $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(\tilde{u}, \tilde{v})$ правила замены переменных в дифференциалах

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{u}} &= u_{\tilde{u}} \mathbf{r}_u + v_{\tilde{u}} \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_{\tilde{v}} &= u_{\tilde{v}} \mathbf{r}_u + v_{\tilde{v}} \mathbf{r}_v \end{aligned} \right\} \iff \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\tilde{u}} & \mathbf{r}_{\tilde{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\tilde{u}} & u_{\tilde{v}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{v}} \end{bmatrix}$$

дают матрицу перехода от базиса $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ к базису $(\mathbf{r}_{\tilde{u}}, \mathbf{r}_{\tilde{v}})$. Это матрица Якоби $J = \frac{D(u,v)}{D(\tilde{u},\tilde{v})}$. Вычисляя коэффициенты метрики по определению (1), находим

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{bmatrix} = J^\top \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} J.$$

Кривизна поверхности

Геодезическая и нормальная кривизны кривой

Выберем на поверхности S точку P , затем проведём через неё лежащую на S кривую. Не меняя точки, заинтересуемся зависимостью между кривизной кривой и расположением её сопровождающего трёхгранника $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ относительно единичной нормали $\mathbf{m}$ к поверхности. Вектор кривизны $\mathbf{k} = k \mathbf{n}$ нашей кривой естественно разложить на нормальную и касательную к поверхности компоненты:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_H + \mathbf{k}_\Gamma, \quad \mathbf{k}_H = k_H \mathbf{m}, \quad \mathbf{k}_\Gamma = \pm k_\Gamma \mathbf{m} \times \mathbf{t}.$$

Коэффициенты k_H и k_Γ называют соответственно **нормальной кривизной** и **геодезической кривизной** кривой на поверхности, причём принято выбирать знак так, чтобы $k_\Gamma \geq 0$.

Выберем параметризацию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ поверхности S ; тогда $\mathbf{m} = \mathbf{e}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$. При естественной параметризации кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ на S компоненты вектора кривизны $\mathbf{k} = \ddot{\mathbf{r}}$ найдём по формулам проектирования вектора на направление:

$$k_H = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}, \quad k_\Gamma = |\ddot{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{m})| = |(\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{m})|.$$

При произвольной параметризации кривой в знаменателях появляются поправки на скорость:

$$k_H = \frac{\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{m}}{|\mathbf{r}'|^2}, \quad k_\Gamma = \frac{|(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', \mathbf{m})|}{|\mathbf{r}'|^3}.$$

Упражнение 4. Проекция кривой $\mathbf{r}(t)$ на касательную плоскость $T_P S$ имеет в точке P кривизну, равную k_Γ .

Геодезические кривые на поверхности

Геодезической на поверхности называют кривую, геодезическая кривизна которой в каждой точке равна нулю. Есть несколько эквивалентных условий в терминах сопровождающего трёхгранника:

- (а) главная нормаль $\mathbf{n}$ кривой всегда коллинеарна нормали $\mathbf{m}$ к поверхности;
- (б) соприкасающаяся плоскость кривой всегда содержит $\mathbf{m}$;
- (в) спрямляющая плоскость кривой всегда совпадает с касательной плоскостью к поверхности.

Теорема. *Через каждую точку поверхности в каждом направлении проходит единственная геодезическая.*

Точнее будет сказать, что любые две достаточно короткие геодезические, проходящие через одну точку в одном направлении, являются дугами большей геодезической. Фактически геодезические продолжаются или неограниченно, или вплоть до края поверхности.

Доказательство. На параметризованной поверхности $\mathbf{r}(u, v)$ ищем уравнение геодезической в виде $v = g(u)$. Подстановка $\mathbf{r}(u, g(u))$ в числитель $(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', \mathbf{m})$ левой части уравнения $k_\Gamma = 0$ даёт дифференциальное уравнение вида $g'' = F(g')$. Явный вид рациональной функции F здесь роли не играет; её коэффициенты зависят от $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{uv}$ и $\mathbf{r}_{vv}$. Существование в некоторой окрестности начальной точки единственного решения с заданными начальными условиями — точка и направление — обеспечивает теорема Пикара. $\square$

Свойства геодезических на поверхности делают их аналогами прямых на плоскости.

Теорема. *Среди всех кривых на поверхности, проходящих через выбранную точку в выбранном направлении, геодезическая имеет наименьшую по абсолютной величине кривизну.*

Доказательство. Следует из разложения $k^2 = k_\Gamma^2 + k_\Gamma^2$ и определённости нормальной кривизны, установленной чуть ниже. $\square$

Теорема. *Если две точки на поверхности достаточно близки, то кратчайшим путём между ними является дуга геодезической.*

Доказательство. Удобно выбрать в окрестности данных точек P_1 и P_2 особую (полугеодезическую) параметризацию, в которой искомая геодезическая служит координатной линией, а метрика имеет вид $ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2$. Приняв, что это всегда возможно, и помня, что $G > 0$ по определению, оценим длину произвольной кривой, соединяющей P_1 и P_2 :

$$L = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{du^2 + G dv^2} \geq \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{du^2}.$$

В правой части стоит как раз длина геодезической, поскольку вдоль неё $dv \equiv 0$. $\square$

Вторая квадратичная форма

Двигаясь вдоль кривой $u = u(t), v = v(t)$ на поверхности $\mathbf{r}(u, v)$, будем следить за изменением единичного вектора нормали $\mathbf{m}(u, v)$. Дифференцируя соотношения $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ и $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{m} = 0$, видим, что $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' = 0$ и $\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{r}' \cdot \mathbf{m}'$. Поэтому нормальная кривизна кривой выражается через пару $\mathbf{r}', \mathbf{m}'$ касательных векторов к поверхности.

Отвлекаясь от кривой, выделим второй статусный объект: $\Pi \Pi = -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{m}$ называют **второй квадратичной формой** поверхности. Её коэффициентам также присвоены устоявшиеся имена:

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{m}_u, \\ M &= \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{m}_v = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{m}_u, \\ N &= \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{m}_v, \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_u & \mathbf{m}_v \end{bmatrix}.$$

Оператор Родрига

Поскольку $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ составляют базис касательной плоскости $T_P S$, правило

$$A\mathbf{r}_u = \mathbf{m}_u, \quad A\mathbf{r}_v = \mathbf{m}_v$$

задаёт единственный линейный оператор на $T_P S$, переводящий приращение $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ радиус-вектора в соответствующее приращение $d\mathbf{m} = \mathbf{m}_u du + \mathbf{m}_v dv$ единичной нормали.

Теорема. Кривые на поверхности, имеющие в *общей* точке *общую* касательную, имеют в ней равные нормальные кривизны.

Доказательство. В одну строчку: $k_H = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m} = -\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{m}} = -\dot{\mathbf{r}} \cdot A\dot{\mathbf{r}}$, но *условием* $\dot{\mathbf{r}}$ определён. $\square$

Упражнение 5. Проверьте, что в базисе $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$ оператор $A: d\mathbf{r} \mapsto d\mathbf{m}$ задаётся матрицей

$$-\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

Упражнение 6. Заметив, что

$$(2) \quad \mathbf{m}_u \times \mathbf{m}_v = K(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v),$$

выразите скаляр $K = K(u, v)$ через коэффициенты первой и второй квадратичных форм, либо через A . Указание: умножьте $\mathbf{m}_u \times \mathbf{m}_v$ и $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ скалярно на $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ и примените тождество

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}.$$

Главные направления и главные кривизны поверхности

Ввиду только что доказанной теоремы осмысленно понятие нормальной кривизны *самой поверхности* в данном касательном направлении $\xi = \xi_1 \mathbf{r}_u + \xi_2 \mathbf{r}_v$. Она находится по формуле

$$k_H(\xi) = \frac{II(\xi)}{I(\xi)} = \frac{L\xi_1^2 + 2M\xi_1\xi_2 + N\xi_2^2}{E\xi_1^2 + 2F\xi_1\xi_2 + G\xi_2^2},$$

причём без потери общности можно ограничиться векторами единичной длины $I(\xi)$.

Заменой базиса пространства — а здесь это касательная плоскость — квадратичная форма II приводится к каноническому (диагональному) виду:

$$II(\xi) = \tilde{L}\tilde{\xi}_1^2 + \tilde{N}\tilde{\xi}_2^2.$$

Если $\tilde{L} \neq \tilde{N}$, то векторы канонического базиса $\mathbf{t}_{\min}$ и $\mathbf{t}_{\max}$ есть единственные (с точностью до знака) направления, в которых нормальная кривизна достигает своих экстремумов $k_{\min}$ и $k_{\max}$. Эти направления и кривизны называют **главными**. Если в выбранной точке $\tilde{L} = \tilde{N}$, то нормальные кривизны во всех направлениях равны.

Поспешное заключение, что главные кривизны и направления находятся как собственные числа и векторы матрицы второй квадратичной формы, ошибочно: нельзя забывать о метрике.

Теорема (Rodrigues). Главные кривизны и главные направления есть собственные числа и собственные векторы оператора $-A$.

Доказательство. Симметричный оператор $-A$ имеет ОНБ из собственных векторов $\mathbf{v}_{\min}$ и $\mathbf{v}_{\max}$, соответствующих вещественным собственным числам $\lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$. (Случай кратного корня окажется малоинтересен.) Запишем вектор $-A\xi$ для произвольного единичного касательного вектора:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathbf{v}_{\min} \cos \theta + \mathbf{v}_{\max} \sin \theta, \\ -A\xi &= \mathbf{v}_{\min} \lambda_{\min} \cos \theta + \mathbf{v}_{\max} \lambda_{\max} \sin \theta. \end{aligned}$$

Подставляя ξ на место $d\mathbf{r}$, имеем $A\xi$ на месте $d\mathbf{m}$. Нормальная кривизна в направлении ξ равна

$$k_H(\xi) = -\frac{\xi \cdot A\xi}{\xi \cdot \xi} = \lambda_{\min} \cos^2 \theta + \lambda_{\max} \sin^2 \theta.$$

Это выражение экстремально при углах, кратных $\frac{\pi}{2}$, то есть на направлениях $\pm \mathbf{v}_{\min}$ и $\pm \mathbf{v}_{\max}$. $\square$

Теорема (Euler, 1760). Нормальная кривизна поверхности в направлении, составляющем угол θ с главным, равна $k_{\min} \cos^2 \theta + k_{\max} \sin^2 \theta$.

Доказательство. Формула в конце предыдущего доказательства. $\square$

Средняя и полная кривизна поверхности

Уравнение $-A(d\mathbf{r}) = k d\mathbf{r}$ на собственные числа и векторы оператора $-A$ скалярным умножением на $d\mathbf{r}$ преобразуется к $II(d\mathbf{r}) = k I(d\mathbf{r})$, поэтому главные кривизны проще найти по матрицам двух квадратичных форм, решая уравнение

$$\det(II - k I) = 0.$$

Раскрывая определитель, получим квадратное уравнение $k^2 - 2Hk + K = 0$ с коэффициентами

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \text{tr}(-A), \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \det(-A),$$

и корнями $k_{\min}$ и $k_{\max}$. Величины $H = \frac{1}{2}(k_{\min} + k_{\max})$ и $K = k_{\min}k_{\max}$ называются соответственно **средней** и **полной кривизной** поверхности в выбранной точке. Обратите внимание, что в формуле (2) скаляр K есть в точности полная кривизна.

Отыскание главных направлений

Найти главные направления $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ означает найти зависимость между du и dv , при которой $d\mathbf{m} = k d\mathbf{r}$. Умножая это уравнение отдельно на $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, получим систему

$$\begin{cases} L du + M dv = k(E du + F dv), \\ M du + N dv = k(F du + G dv). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} L du + M dv & E du + F dv \\ M du + N dv & F du + G dv \end{vmatrix} = 0,$$

что можно переписать в более компактном виде

$$\begin{vmatrix} -dv^2 & du dv & -du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда всегда можно найти два отношения $du : dv$, дающих искомые главные направления.

Типы точек и соприкасающийся параболоид

Значения главных кривизн определяют форму поверхности вблизи выбранной точки. В системе координат с началом в точке P поверхности и репером $(\mathbf{t}_{\min}, \mathbf{t}_{\max}, \mathbf{m})$ рассмотрим квадрику

$$2z = k_{\min} x^2 + k_{\max} y^2.$$

Это уравнение отличается от уравнения $z = f(x, y)$ исходной поверхности вблизи точки P величинами третьего порядка малости по x и y , поскольку является фактически разложением Тэйлора функции $f(x, y)$ до второго порядка. Поэтому среди всех квадрик, проходящих через точку P , эта — единственная, имеющая соприкосновение второго порядка с исходной поверхностью. Её называют **соприкасающимся параболоидом**. В соответствии с типом параболоида классифицированы регулярные точки поверхности.

Кривизны	Квадрика	Тип точки
$k_{\min} = k_{\max} = 0$	Плоскость	Точка уплощения
$k_{\min}k_{\max} = 0$	Параболический цилиндр	Параболическая точка
$k_{\min}k_{\max} < 0$	Гиперболический параболоид	Гиперболическая точка
$k_{\min}k_{\max} > 0$	Эллиптический параболоид	Эллиптическая точка
$k_{\min} = k_{\max} \neq 0$	Параболоид вращения	Омбилическая точка

Внутренняя геометрия поверхности

В этой главе займёмся поиском ответов на два общих вопроса о поверхностях. Какие построения и величины определяются:

- (1) заданием первой квадратичной формы;
- (2) заданием первой и второй квадратичных форм?

Основным будет первый вопрос: занятие им и составляет предмет *внутренней геометрии* поверхности. Ответ на второй вопрос структурно прост и технически попутен.

Изометричность и изгибание

Биективное отображение $\varphi: S \rightarrow S^*$ поверхностей называется **изометрией**, если оно сохраняет длины всех кривых. Наглядное представление об изометриях даёт изгибание листа бумаги в куски цилиндра или конуса. Не менее интересен пример изометрии между кусками геликоида и катеноида.

Параметризации изометричных кусков $\mathbf{r}(u, v)$ и $\mathbf{r}^*(u, v)$ удобно согласовывать так, чтобы иметь тождество $\mathbf{r}^*(u, v) \equiv \varphi(\mathbf{r}(u, v))$. Тогда метрики $\mathbf{I}$ и $\mathbf{I}^*$ совпадают как функции u и v . Следовательно, все величины, выражающиеся через коэффициенты метрики и их производные любого порядка, неизменны (инвариантны) при изометриях. Перечислим некоторые из них:

- геодезическая кривизна кривых;
- полная кривизна поверхности;
- параллельный перенос векторов вдоль кривых.

Индексные обозначения

Если прежде мы могли позволить себе обозначать параметры и всякие коэффициенты различными буквами почти без индексов, то теперь характер возникающих формул требует перехода к более гибким и мощным индексным обозначениям.

Параметры поверхности	u^i	$u^1 = u, u^2 = v$
Операция дифференцирования	∂_i	$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial v}$
Первые частные производные	$\mathbf{r}_i$	$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_v$
Вторые частные производные	$\mathbf{r}_{ij}$	$\mathbf{r}_{11} = \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{22} = \mathbf{r}_{vv}$
Компоненты метрики	g_{ij}	$g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G$
Компоненты «обратной» метрики	g^{ij}	(элементы обратной матрицы)
Компоненты формы II	b_{ij}	$b_{11} = L, b_{12} = M, b_{22} = N$
Компоненты оператора A	a_j^i	(выше явно не выписывались)

Какая будет выгода?

- (1) Сокращение количества формул за счёт превращения нескольких похожих формул в одну формулу, имеющую «свободные» индекс(ы) в качестве параметров.
- (2) Упрощение формул с использованием знака суммирования по «несвободным» индексам.
- (3) Дальнейшее упрощение формул за счёт опускания (иногда многочисленных) знаков суммирования, достигаемое хитрыми соглашениями о расстановке индексов.

Для внимательного рассмотрения, вот примеры уже известных формул в новых обозначениях:

Смысл формулы	Формула	Индексы в формуле	
		спаренные	свободные
Определение метрики	$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$	нет	i, j
Определение формы II	$b_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{m} = -\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{m}_j$	нет	i, j
Касательный вектор	$\boldsymbol{\xi} = \xi^i \mathbf{r}_i$	i	нет
Координаты вектора $\boldsymbol{\xi}$	ξ^i	нет	i
Значения метрики	$\mathbf{I}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = g_{ij} \xi^i \xi^j$	i, j	нет
	$\mathbf{I}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} = g_{ij} \xi^i \eta^j$	i, j	нет
Связь оператора A с формами I и II	$a_j^i = -g^{ik} b_{kj}$	k	i, j

Выводы о системе индексных обозначений:

- индексы делятся на нижние и верхние;
- наборы свободных индексов в левой и правой частях формулы должны совпадать;
- спаренный индекс — раз нижний и раз верхний — означает суммирование по всем значениям этого индекса.
- любой индекс можно молча заменять (всюду!) любой ещё не использованной буквой.

Принцип определения расположения каждого конкретного индекса проясняется при изучении тензорной алгебры и тензорного анализа.

Деривационные формулы

Исторически сложившаяся группа **деривационных формул** состоит из разложений по базису $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m})$ в каждой точке поверхности частных производных самих этих векторов:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{ij} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + b_{ij} \mathbf{m}, \\ \mathbf{m}_j &= a_j^i \mathbf{r}_i.\end{aligned}$$

Последняя формула идентична определению оператора Родрига.

Неизвестные пока функции Γ_{ij}^k называют **коэффициентами связности**. Умножая это разложение скалярно на $\mathbf{r}_\ell$, получим $\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_\ell = \Gamma_{ij}^k g_{k\ell}$. С другой стороны, $\partial_k(g_{ij}) = \mathbf{r}_{ik} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_{jk} \cdot \mathbf{r}_i$, поэтому в итоге Γ_{ij}^k выражаются через первые производные компонент метрики, а также компоненты «обратной» метрики, возникающие при решении системы линейных уравнений. При изометриях эти функции сохраняются и во внутренней геометрии поверхности они оказываются вездесущи.

Упражнение 7. Получите явную формулу для Γ_{ij}^k , о которой идёт речь.

Упражнение 8. Покажите, что $\mathbf{r}_{11} \cdot \mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{21}$ равно линейной комбинации вторых частных производных компонент метрики. Указание: рассмотрите подходящие производные $\partial_\ell(\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_k)$.

Упражнение 9. Запишите $\partial_1(b_{2j}) - \partial_2(b_{1j})$ как линейную комбинацию произведений Γ_{ij}^k на b_{ij} с подходящими индексами. Указание: $b_{ij} = -\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{m}_j$. Вот ответ в компактной, но необычной форме:

$$\begin{vmatrix} \partial_1 & b_{1j} \\ \partial_2 & b_{2j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma_{1j}^k & b_{1k} \\ \Gamma_{2j}^k & b_{2k} \end{vmatrix}.$$

Здесь нужно формально раскрыть определители, чтобы получить корректную индексную запись.

Выражение геодезической кривизны

Вычислим кривизну кривой $u^i(s)$ на поверхности $\mathbf{r}(u^1, u^2)$. Дифференцируем:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{u}^i \mathbf{r}_i, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{u}^k \mathbf{r}_k + \dot{u}^i \dot{u}^j \mathbf{r}_{ij}.$$

Подставляя сюда $\mathbf{r}_{ij}$ из деривационных формул и разделяя компоненты, получим

$$\mathbf{k}_H = b_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \mathbf{m}, \quad \mathbf{k}_\Gamma = w^k \mathbf{r}_k,$$

причём функции $w^k = \ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j$ сохраняются при изометриях. Наконец, из формул $k_\Gamma = |\mathbf{k}_\Gamma \times \dot{\mathbf{r}}|$ и $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \sqrt{\det \mathbf{I}} \mathbf{m}$ находим

$$k_\Gamma = \begin{vmatrix} \dot{u}^1 & w^1 \\ \dot{u}^2 & w^2 \end{vmatrix} \sqrt{\det \mathbf{I}}.$$

Теорема. Геодезическая кривизна кривой на поверхности сохраняется при изометриях. □

Следствие. Изометрии переводят геодезические в геодезические. □

Theorema Egregium

Перемножая скалярно деривационные формулы для $\mathbf{r}_{1i}$ и $\mathbf{r}_{j2}$, видим

$$\mathbf{r}_{1i} \cdot \mathbf{r}_{j2} = \Gamma_{1i}^k \Gamma_{j2}^\ell \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_\ell + b_{1i} b_{j2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \Gamma_{1i}^k \Gamma_{j2}^\ell g_{k\ell} + b_{1i} b_{j2}.$$

Разность двух формул, получаемых отсюда при $i \neq j$, даёт

$$\det \mathbf{II} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma_{11}^k & \Gamma_{12}^\ell \\ \Gamma_{21}^k & \Gamma_{22}^\ell \end{vmatrix} g_{k\ell}.$$

Выполнившие [предпоследнее упражнение](#) могут считать, что они доказали великую теорему, за которой закрепилось оригинальное латинское название, данное удивлённым первооткрывателем.

Теорема (Gauss; 1827). Полная кривизна поверхности сохраняется при изометриях.

Доказательство. Числитель формулы

$$K = \frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}}$$

удалось выразить через компоненты $\mathbf{I}$ и их производные. □

Таким образом, полную кривизну поверхности можно измерить путём измерения расстояний и углов на ней. (Мотивацией для этих исследований Гаусса была геодезия.)

Оформление поверхности в пространстве

Рассмотрим две поверхности S и S^{**} в пространстве, обладающие такими параметризациями $\mathbf{r}(u, v)$ и $\mathbf{r}^{**}(u, v)$, что совпадают первые и вторые квадратичные формы.

Теорема (Петерсон, 1853). *Если $I = I^{**}$ и $II = II^{**}$ как функции от u, v для поверхностей S и S^{**} , то найдётся движение $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ пространства как твёрдого тела, совмещающее эти поверхности: $\mathbf{r}^{**}(u, v) \equiv \varphi(\mathbf{r}(u, v))$.*

Доказательство. Выберем любую точку $P = \mathbf{r}(u, v)$ и соответствующую ей точку $P^{**} = \mathbf{r}^{**}(u, v)$. Сдвигом в пространстве совместим эти точки. Ввиду совпадения метрик найдётся поворот, совмещающий реперы $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{m})$ и $(\mathbf{r}_1^{**}, \mathbf{r}_2^{**}, \mathbf{m}^{**})$ в этих точках. Пусть φ будет композицией указанных сдвига и поворота.

Выберем кривые $u = u(t)$, $v = v(t)$ на S и на S^{**} , проходящие при $t = 0$ через точку $P = P^{**}$. Вдоль них получим уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i) &= \frac{d}{dt}(u^j) \mathbf{r}_{ij} = \frac{d}{dt}(u^j) \Gamma_{ij}^k \mathbf{r}_k + \frac{d}{dt}(u^j) b_{ij} \mathbf{m}, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{m}) &= \frac{d}{dt}(u^j) \mathbf{m}_j = \frac{d}{dt}(u^j) a_j^i \mathbf{r}_i\end{aligned}$$

и такую же точно систему линейных дифференциальных уравнений для $(\mathbf{r}_1^{**}, \mathbf{r}_2^{**}, \mathbf{m}^{**})$, поскольку условия $I = I^{**}$ и $II = II^{**}$ гарантируют идентичность деривационных формул для S и S^{**} . Благодаря единственности решения системы при заданных начальных условиях, наши реперы совпадают всюду вдоль выбранных кривых. Тогда приращение радиус-вектора

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0) = \int_0^t \frac{d}{dt}(u^j) \mathbf{r}_j dt$$

совпадает с приращением $\mathbf{r}^{**}(t) - \mathbf{r}^{**}(0)$. Поэтому поверхности совмещены целиком, если употребить одинаковые области определения функций $\mathbf{r}(u, v)$ и $\mathbf{r}^{**}(u, v)$. $\square$

Раз первая и вторая квадратичные формы полностью определяют вид поверхности в пространстве, естественно спросить, как сделанный выбор I ограничивает возможности для II . Ограничения сводятся к полученной выше **формуле Гаусса**, выражающей $\det II$ через метрику и её производные, и к **формулам Петерсона — Майнард — Кодаци**, связывающим две комбинации производных от b_{ij} с самими b_{ij} посредством коэффициентов связности и приведённым в последнем из упражнений на деривационные формулы. Оставим этот факт без доказательства.

Абсолютная производная и параллельный перенос

Векторные поля на поверхности

Выбор на параметризованной поверхности $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ **векторного поля** $\mathbf{v} = v^i \mathbf{r}_i$ означает, что в каждой точке поверхности выбран касательный вектор, координаты которого в базисе $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ есть гладкие функции параметров u^i .

Векторные поля можно складывать, просто складывая векторы в соответствующих точках, что алгебраически эквивалентно сложению координатных функций:

$$(v^i \mathbf{r}_i) + (w^i \mathbf{r}_i) = (v^i + w^i) \mathbf{r}_i.$$

Аналогично выполняется умножение на скаляры, поэтому множество $\text{Vect}(S)$ векторных полей на данной поверхности S есть линейное пространство.

Поля *некасательных* векторов полезны при рассмотрении поверхности, вложенной в $\mathbb{R}^3$. Мы регулярно использовали единичное нормальное поле $\mathbf{m}$. Скалярное произведение двух векторных полей есть функция на поверхности, а в иных терминах — **скалярное поле**. Значения его вычисляются скалярным перемножением векторов данных полей в соответствующих точках. Эту операцию мы проводили, определяя первую и вторую квадратичные формы. Аналогично определено векторное произведение полей; если поля $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ касательные, то $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ есть нормальное поле к поверхности.

Выбирая на поверхности единичное касательное поле $\mathbf{p}$, то есть $|\mathbf{p}| \equiv 1$, и ортогональное ему единичное касательное поле $\mathbf{q} = \mathbf{m} \times \mathbf{p}$, получим подвижный ОНБ $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{m})$.

Упражнение 10. Выведите тождество

$$(\mathbf{m}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_1.$$

Индексы на $\mathbf{m}$, $\mathbf{p}$, и $\mathbf{q}$ обозначают частные производные по u^i .

Указание: введите мгновенные угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ вращения репера $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{m})$ при смещении вдоль $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, тогда $\mathbf{m}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{m}$ и т. п., так что все задействованные векторы выразятся через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$; далее достаточно тождеств векторной алгебры.

Абсолютная производная векторного поля

Посчитаем производную от касательного поля $\mathbf{v} = v^i \mathbf{r}_i$ по направлению координатной линии:

$$\partial_j(\mathbf{v}) = \partial_j(v^i \mathbf{r}_i) = \partial_j(v^i) \mathbf{r}_i + v^i \mathbf{r}_{ij} = (\partial_j(v^k) + \Gamma_{ij}^k v^i) \mathbf{r}_k + b_{ij} v^i \mathbf{m}.$$

Присутствие нормальной компоненты портит картину. В то время как $\mathbf{v}$ принадлежит внутренней геометрии, поскольку функции v^i зависят лишь прямо от u^j и не замечают изгибаний, его обычная производная $\partial_j(\mathbf{v})$ чувствительна к положению поверхности в пространстве. Поэтому интересным объектом является

$$\nabla_j(\mathbf{v}) = (\partial_j(v^k) + \Gamma_{ij}^k v^i) \mathbf{r}_k,$$

то есть проекция $\partial_j(\mathbf{v})$ на касательную плоскость, называемая **абсолютной производной** векторного поля $\mathbf{v}$. Это тоже получается векторное поле. В выборе обозначений для его координат есть некая трудность; остановимся на одном из распространённых вариантов:

$$v_{;j}^k = \partial_j(v^k) + \Gamma_{ij}^k v^i.$$

При этом странный нижний индекс в $v_{;j}^k$ указывает на параметр, по которому взята производная, а точка с запятой указывает на её абсолютность.

Абсолютное дифференцирование ∇_j линейно:

$$\nabla_j(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha \nabla_j(\mathbf{v}) + \beta \nabla_j(\mathbf{w}),$$

так что оно является линейным оператором на пространстве $\text{Vect}(S)$.

Дифференцирование одного векторного поля вдоль другого

Абсолютные дифференцирования можно скомпоновать в абсолютный дифференциал $\nabla = \nabla_j du^j$, но это объект непростой. Вместо него удобнее перейти к производным по любому векторному полю. Они берутся в каждой точке по тому же правилу, что и обычные производные по вектору в анализе. Итак, выбирая векторное поле $\mathbf{z} = z^j \mathbf{r}_j$, получаем соответствующий оператор дифференцирования

$$\nabla_{\mathbf{z}} = z^j \nabla_j: \text{Vect}(S) \rightarrow \text{Vect}(S).$$

Применение этого оператора к векторному полю $\mathbf{v} = v^i \mathbf{r}_i$ даёт новое векторное поле

$$\nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{v} = z^j v_{;j}^k \mathbf{r}_k.$$

Параллельный перенос на поверхности

Понятие параллельного переноса векторов на поверхности имеет две стороны, геометрическую и аналитическую; конечно же, они удачно согласуются.

На поверхности возьмём кривую $\mathbf{r}(t)$ и касательный вектор $\mathbf{q}(0)$ в одной её точке. Есть только одна возможность так определить векторы $\mathbf{q}(t)$, касательные к поверхности в соответствующих точках $\mathbf{r}(t)$, чтобы, двигаясь вдоль кривой, всегда иметь $\mathbf{q}'(t) \parallel \mathbf{m}(t)$. Это и есть параллельный перенос вдоль кривой. Результат переноса в общем случае зависит от пути. Название объясняется тем, что при этом вектор $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$ получается параллельным переносом в пространстве вектора $\mathbf{q}$, приложенного в точке $\mathbf{r}(t)$, в точку $\mathbf{r}(t + dt)$. Если на самом деле $\mathbf{q}$ определён не только вдоль кривой, а на куске поверхности, то абсолютная производная от $\mathbf{q}(t)$ вдоль $\mathbf{r}'(t)$ по определению обязана равняться нулю.

Теорема. *Параллельный перенос инвариантен относительно изометрий.*

Доказательство. Следует из инвариантности абсолютной производной. □

Неформально говоря, перенести затем изогнуть, или изогнуть затем перенести, — разницы нет.

Теорема. *При параллельном переносе вдоль кривой на поверхности касательная плоскость к поверхности движется как твёрдое тело.*

Доказательство. Выберем пару касательных векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ и посмотрим, как они перенесутся:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})' = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}'.$$

В правой части обе производные коллинеарны нормали $\mathbf{m}$ к поверхности, а потому $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})' \equiv 0$, что означает сохранение всех длин и углов при движении касательной плоскости. □

Упражнение 11. *Единичное касательное поле геодезической параллельно. (Это значит, что оно получается параллельным переносом себя вдоль геодезической из любой её начальной точки.)*

Обнесение по контуру и кривизна

Возьмём теперь *замкнутую* кривую C на поверхности S — их часто называют **контурами** — и исследуем состояние касательной плоскости к S в выбранной точке C после обнесения её параллельно вокруг контура. Будучи твёрдым телом, касательная плоскость может лишь повернуться на какой-то угол $\Delta\varphi$ относительно начального положения; его и будем искать. (Положительным считаем угол поворота от $\mathbf{r}_1$ к $\mathbf{r}_2$.) Контур обходим в положительном направлении, как обычно в анализе. Наглядно: область остаётся слева, нормаль $\mathbf{m} = \mathbf{e}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$ направлена вверх.

Зафиксируем любое единичное векторное поле $\mathbf{p}$ как начало отсчёта углов в каждой касательной плоскости. Какой бы касательный вектор мы не несли параллельно вдоль нашего контура, дифференциал угла $d\varphi$ будет одним и тем же, зависящим только от $\mathbf{p}$ и контура. Можно проверить, что на самом деле $d\varphi = -\mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}$, где $\mathbf{q} = \mathbf{m} \times \mathbf{p}$.

Теорема. Угол поворота вектора, параллельно обнесённого по замкнутому контуру на поверхности, равен интегралу от полной кривизны по области D , охваченной этим контуром:

$$\Delta\varphi = \iint_D K dS.$$

Доказательство. Подставим $d\varphi = -\mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}$ и преобразуем полученный контурный интеграл в поверхностный по формуле Стокса:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \oint_C d\varphi = - \oint_C \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p} = - \oint_C (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_1 du^1 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_2 du^2) \\ &= \iint_D (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_1) du^1 du^2. \end{aligned}$$

По упражнениям 10 и 6 перепишем подынтегральную функцию:

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_2 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2) = K \mathbf{m} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = K \sqrt{\det \mathbf{I}}.$$

Наконец, $\sqrt{\det \mathbf{I}} du^1 du^2$ есть в точности элемент площади поверхности dS . □

Кусочно-гладкие контуры и локальная теорема Гаусса — Бонне

Рассмотрим теперь поведение касательного вектора $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$ к контуру $\mathbf{r}(s)$ при обходе его с единичной скоростью. При однократном обходе угол между $\mathbf{t}$ и выбранным началом отсчёта $\mathbf{p}$ получает приращение 2π . Оно складывается из поворота касательной плоскости на угол $\Delta\varphi$ и приращения $\Delta\psi$ угла между $\mathbf{t}$ и каким-то параллельно переносимым вектором. Считаем контур кусочно гладким, то есть допускаем угловые точки со скачками $\Delta_i\psi$ направления $\mathbf{t}$, тогда

$$\Delta\psi = \oint_C d\psi + \sum \Delta_i\psi.$$

На каждом гладком куске контура имеем, как и выше, $d\psi = -(\mathbf{m} \times \mathbf{p}) \cdot d\mathbf{p}$, причём роль $\mathbf{p}$ может играть любое единичное касательное поле, например $\mathbf{t}$. Поэтому

$$d\psi = -(\mathbf{m} \times \mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{t}} ds = -(\mathbf{m}, \mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}}) ds = (\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{m}) ds = k_\Gamma ds,$$

где геодезическая кривизна берётся вместе со знаком.

Теорема. Для каждого контура C , ограничивающего элементарный кусок поверхности D , полная кривизна поверхности и геодезическая кривизна контура связаны формулой

$$\iint_D K dS + \oint_C k_\Gamma ds + \sum \Delta_i\psi = 2\pi.$$

Доказательство. Предшествующие рассуждения и предыдущая теорема. □

Как интересный частный случай отсюда следует формула суммы углов геодезического многоугольника. Для геодезического треугольника T с внутренними углами α, β, γ получается

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \iint_T K dS.$$

Минимизация площади поверхности при заданном крае

Изучим вопрос, имеющий непосредственные приложения в разных областях науки: можно ли уменьшить площадь конкретной поверхности, немного шевеля её вдали от края? Если нет, то поверхность называют **минимальной**. Такую форму принимают мыльные плёнки и разнообразные двумерные молекулярные и биологические структуры.

Теорема. *Средняя кривизна минимальной поверхности равна нулю во всех точках.*

Доказательство. Возьмём кусок D поверхности с параметризацией $\mathbf{r}(u^i)$. Зададим шевеление как небольшое смещение в направлении нормали, полагая $\mathbf{r}^\varepsilon = \mathbf{r} - \varepsilon \eta \mathbf{m}$. Гладкая функция $\eta = \eta(u^i)$ должна зануляться на краю куска, но в остальном произвольна. Малый параметр деформации ε не зависит от точки поверхности, а причина выбора знака минус скоро прояснится.

Площадь S исходной поверхности минимальна, когда она меньше всех площадей S^ε близких к ней поверхностей, что возможно только если $\frac{1}{\varepsilon}(S^\varepsilon - S) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любой функции η . Подобные пределы называют вариационными производными.

Итак, мы ищем предел выражения

$$\frac{1}{\varepsilon}(S^\varepsilon - S) = \frac{1}{\varepsilon} \iint_D (\sqrt{\det g^\varepsilon} - \sqrt{\det g}) du^1 du^2.$$

Для этого сперва найдём зависимость метрики от ε . Два первых слагаемых у частных производных

$$\mathbf{r}_i^\varepsilon = \mathbf{r}_i - \varepsilon \eta \mathbf{m}_i - \varepsilon \eta_i \mathbf{m}$$

касательны к поверхности, а третье направлено по нормали; поэтому в выражении компонент метрики $g_{ij}^\varepsilon = \mathbf{r}_i^\varepsilon \cdot \mathbf{r}_j^\varepsilon$ четыре слагаемых равны нулю. Остается

$$g_{ij}^\varepsilon = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j - \varepsilon \eta (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{m}_j + \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_j) + o(\varepsilon) = g_{ij} + 2\varepsilon \eta b_{ij} + o(\varepsilon).$$

Знак минус поглотило определение второй квадратичной формы. Вычислим определитель:

$$\begin{aligned} \det g^\varepsilon &= g_{11}^\varepsilon g_{22}^\varepsilon - (g_{12}^\varepsilon)^2 = (g_{11} + 2\varepsilon \eta b_{11})(g_{22} + 2\varepsilon \eta b_{22}) - (g_{12} + 2\varepsilon \eta b_{12})^2 \\ &= (g_{11}g_{22} - g_{12}^2) + 2\varepsilon \eta (g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Распознаём во второй скобке числитель формулы, которой мы ввели среднюю кривизну, а в первой — её знаменатель. Значит,

$$\det g^\varepsilon = \det g \cdot (1 + 4H\varepsilon \eta + o(\varepsilon)).$$

Извлекая корень, воспользуемся разложением $\sqrt{1+2x} = 1 + x + o(x)$ для упрощения:

$$\sqrt{\det g^\varepsilon} = \sqrt{\det g} \cdot (1 + 2H\varepsilon \eta + o(\varepsilon)).$$

Поэтому искомый предел равен

$$\iint_D 2H\eta dS.$$

Равенство этого интеграла нулю для всех функций η означает, что $H = 0$ тождественно на всей поверхности. $\square$

Эйлерова характеристика и глобальная теорема Гаусса — Бонне

Компактную гладкую поверхность без края всегда можно **триангулировать**, то есть разбить на треугольные кусочки. Число вершин, ребёр (сторон) и граней (треугольников) в таких случаях принято обозначать буквами V , E и F . Также поступают при разбиениях на многоугольники.

Упражнение 12. Проверьте, что число $V - E + F$ зависит только от поверхности, а не от способа её разбиения на многоугольники.

Это число называют **эйлеровой характеристикой** поверхности и обозначают через $\chi = \chi(S)$. Например, у сферы $\chi = 2$, а у тора $\chi = 0$.

Теорема. Интеграл по всей поверхности от её полной кривизны пропорционален её эйлеровой характеристике, а именно,

$$\iint_S K dS = 2\pi\chi(S)$$

для всякой компактной гладкой поверхности S .

Доказательство. Сделаем триангуляцию на геодезические треугольники. На каждом треугольнике

$$\iint_T K dS = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

В сумме этих равенств по всем F треугольникам получим 2π вокруг каждой из V вершин, так что справа будет $\pi(2V - F)$. Затем заметим, что $3F = 2E$, ибо каждая сторона принадлежит ровно двум треугольникам, а у каждого треугольника ровно три стороны. Поэтому $2V - F$ превращается в $2(V - E + F) = 2\chi$. $\square$

Произвольные деформации поверхности, в отличие от изгибаний, меняют её кривизну. Из этой теоремы следует, что в отсутствие разрывов и склеек интеграл от полной кривизны сохраняется, поскольку сохраняется эйлерова характеристика.