

Вопросы к устному экзамену по теории функций комплексного переменного

ФФ НГУ, январь 2022

ЛЕКТОР — УЛЬЯНОВ АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ

Устный экзамен состоит из двух этапов. На первом этапе нужно без подготовки ответить на 4-5 вопросов по базовым определениям и формулировкам утверждений (теорем, примеров). Ниже 70 баллов из 100 на первом этапе — окончание экзамена, «неуд». Иначе даётся час на подготовку к ответам на вопросы второго этапа. По итогам второго этапа оценка определяется по сумме баллов с учётом работы в семестре.

Приведённый список вопросов составлен по оглавлению конспекта лекций с небольшими изменениями. Вопросы в билетах могут быть сформулированы иначе. На первом этапе будут только вопросы, набранные здесь чёрным. Выделение номера вопроса показывает, что выделен весь вопрос.

глава 1

- 1. Комплексная плоскость.** Формы записи комплексных чисел. Алгебраические операции. Сопряжение. Инверсия.
- 2. Сфера Римана и стереографическая проекция.** Круговое свойство. Сохранение углов.
- 3. Способы изображения комплексных функций.** Образ участка плоскости. График модуля функции. Метод цветных областей.
- 4. Дробно-линейные преобразования.** Круговое свойство и сохранение углов. Анггармоническое отношение. Задание образами трёх точек. [Симметрия относительно окружности](#).
- 5. Другие простейшие функции.** Степенная функция с целым показателем. Полиномы и основная теорема алгебры. Рациональные функции. Функция Жуковского. Комплексная экспонента.
- 6. Тригонометрические и гиперболические функции.** Косинус и синус. Тангенс и котангенс. Гиперболические функции.
- 7. Топологические понятия.** Открытые множества. Замкнутые множества. Внутренность, граница, замыкание. Ограниченные и компактные множества. Непрерывность и предел функции.
- 8. Топологические понятия.** Ориентированные кривые, дуги и контуры. Связные множества и компоненты. Области. [Усмирение границ](#). Гомотопия и стягиваемость.

глава 2

- 9. Комплексное дифференцирование.** Условия Коши — Римана. [Неформальная проверка по правилу цепочки](#). [Матричная форма](#). Комплексная дифференцируемость.
- 10. Аналитические функции.** Аналитичность на области. Аналитичность в точке. Аналитичность на множестве.
- 11. Геометрический смысл производной.** Консерватизм углов. Постоянство растяжения. Конформные отображения.
- 12. Обратные функции и ветвление.** Локальная обратимость. Области однолиственности. Ветви корня. Ветви логарифма. [Выделение однозначных ветвей](#). [Общая степенная функция](#).
- 13. Обратные тригонометрические функции.** Арктангенс. Арккотангенс. Арккосинус. Арксинус. Арксеканс и арккосеканс. Обратные гиперболические функции.
- 14. Интеграл по дуге.** Общие свойства комплексного интеграла.
- 15. Интегральная теорема Коши.** Сама теорема. Непрерывная деформация дуги в области. Многосвязные области и составные контуры. [Схема доказательства Гурса](#). [Примеры прикладных вычислений](#).
- 16. Вычеты в полюсах.** Правильные и особые точки. Изолированная особая точка. Определение вычета. Основная теорема о вычетах. Вычет в простом полюсе. Вычет в кратном полюсе.
- 17. Интегральная формула Коши.** Сама формула. [Доказательство формулы](#). Теорема о среднем и принцип максимума. Дифференцирование формулы Коши.
- 18. Первообразные аналитической функции.** Существование первообразной. Теорема Мореры. Логарифм, арктангенс, арксинус. [Функции Ламберта и Гудермана](#).

19. **Гармонические функции.** Сопряжённые гармонические функции. [Гармонические функции в круге. Задача Дирихле.](#)
20. **Комплексный потенциал в физике.** Плоские векторные поля. Комплексный потенциал. Важнейшие примеры особых точек течений. [Обтекание цилиндров.](#)

глава 3

21. **Равномерная сходимост.** Напоминания основных свойств. Почленное интегрирование. «Первая» теорема Вейерштрасса.
22. **Степенные ряды.** Круг сходимости. Свойства суммы. Ряд Тейлора. Разложение аналитической функции.
23. **Некоторые следствия разложения Тейлора.** [Неравенства Коши для коэффициентов ряда.](#) Целые функции и теорема Лиувилля. Равномерное приближение полиномами. [Задача Дирихле в круге.](#) Изолированность нулей. Порядок нуля.
24. **Ряд Лорана.** Первые примеры. Правильная и главная части. Теорема Лорана.
25. **Изолированные особые точки.** Классификация. Устранимая особая точка. Полнос и его порядок. [Полосы конструкций.](#) Бесконечно удалённая точка. [Подъёмная сила крыла.](#) [Существенно особая точка.](#)
26. **Целые и мероморфные функции.** Целые функции и главные части. Разложение на простейшие дроби. Бесконечное число полюсов. [Разложение в бесконечное произведение.](#) [Неэлементарные первообразные.](#) [Решения дифференциальных уравнений.](#)
27. **Аналитическое продолжение.** Внутренняя теорема единственности. Продолжение вещественных функций. Продолжение суммой ряда. Гамма-функция на правой полуплоскости. Полная гамма-функция 1. Полная гамма-функция 2. Формула Вейерштрасса для гамма-функции. Естественные границы.
28. **Принцип аргумента и расположение нулей.** Логарифмический вычет. Подсчёт числа нулей и полюсов. [Двоякопериодические функции.](#)
29. **Теорема Руше.** Обычная форма теоремы Руше. [Симметричная форма теоремы Руше.](#)

глава 4

30. **Однозначные функции.** Рационально-тригонометрические функции. Дроби, ограниченные на вещественной оси. Преобразование Фурье рациональной функции. Формула отражения для гамма-функции.
31. **Однозначные функции и главные значения.** Полувычет в простом полюсе. Примеры главных значений. Теоремы о главных значениях. [Соотношения Крамерса — Кронига.](#)
32. **Интегралы со степенным весом.** Квадратный корень. Степенной вес. Теорема про степенной вес.
33. **Интегралы с логарифмическим весом.** Логарифмический вес и полукольцо. Логарифмический вес и подкова. Теорема про логарифмический вес.
34. **Многозначные функции и главные значения.** Примеры главных значений. Теоремы о главных значениях. Внезапные главные значения.
35. **Преобразование Лапласа.** Оригиналы и изображения. Аналитичность изображения. Формула обращения. [Свёртка изображений и умножение оригиналов.](#) Существование оригинала. Вторая теорема разложения. Первая теорема разложения. [Аналитическое продолжение бета-функции.](#)
36. **Цилиндрические функции Бесселя.** Разложение Фурье плоской волны. Производящая функция. Степенные ряды и уравнение Бесселя. Пример на первую теорему разложения. Колебания висающей цепи.

глава 5

37. **Асимптотические разложения.** Пример Эйлера. Последовательности и разложения. Нули и совпадение. Общие свойства. Степенные разложения. Аналитические функции.
38. **Асимптотика некоторых интегралов.** Интегрирование по частям. Метод Лапласа. Метод стационарной фазы.