

Вопросы к устному экзамену по линейной алгебре и геометрии

ФФ НГУ, июнь 2020

ЛЕКТОР — УЛЬЯНОВ АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ

Список вопросов составлен по оглавлению конспекта лекций. Некоторые вопросы в билетах сформулированы иначе; некоторые сочетают части разных вопросов из этого списка, особенно в билетах на 3. На 3 требуются только вопросы и их части, не выделенные никаким цветом (чёрные), причём только формулировки без доказательств. Выделение номера вопроса означает, что выделен весь вопрос. В билеты на 4 и на 5 входят, помимо чёрных, [синие](#) вопросы с доказательствами. Билеты на 5 также могут включать [красные](#) вопросы, но их изложение предполагается с пропусками наиболее сложных мест.

глава 4

- 1. Системы линейных уравнений и их решения.** Матричная запись и терминология. Классификация по количеству решений. Эквивалентные системы. Элементарные преобразования строк.
- 2. Метод исключения неизвестных.** Системы ступенчатого вида. Приведение к ступенчатому виду. Общее решение системы. Ранг матрицы. Критерий совместности.
- 3. Линейные пространства строк и столбцов.** Линейные комбинации. Линейная зависимость и линейная независимость. Линейная оболочка. Линейные подпространства.
- 4. Базис и размерность.** Координаты вектора относительно выбранного базиса. Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Существование базиса подпространства. Размерность линейного пространства. Ранг системы векторов.
- 5. Ранг матрицы.** Ранг матрицы по строкам и по столбцам. Теорема о совпадении рангов. Критерий совместности системы линейных уравнений.
- 6. Общее решение системы линейных уравнений.** Однородные линейные системы, пространство решений, фундаментальная система решений. Неоднородные линейные системы, многообразие решений.
- 7. Действия с подпространствами.** Пересечение и сумма. Формула размерностей Грассмана. [Доказательство](#). Сумма нескольких подпространств. Прямые суммы. Размерность прямой суммы. Дополнение к подпространству. [Прямая сумма как конструкция](#).

глава 5

- 8. Различные подходы к понятию определителя.** Перестановки. Инверсии и чётность перестановки. Комбинаторная формула полного раскрытия определителя. [Поведение числа инверсий \(лемма без доказательства\)](#).
- 9. Миноры и раскрытие.** Минор и алгебраическое дополнение. Раскрытие определителя по строке или столбцу. Определитель (блочной) треугольной матрицы.
- 10. Свойства определителей.** Элементарные преобразования определителей. Полилинейность и кососимметричность. [Характеризация определителя этими свойствами \(без доказательства\)](#). Определитель произведения матриц.
- 11. Невырожденные матрицы.** Критерий невырожденности. Формула для обратной матрицы. Правило Крамера. Ранг матрицы по минорам, эквивалентность с прежними определениями. [Метод окаймляющих миноров](#).
- 12. Полиномиальная интерполяция.** Уравнение прямой. Интерполяционный полином в форме Лагранжа. Полином Тейлора. [Интерполяция Эрмита](#).

глава 6

- 13. Билинейные и квадратичные формы: введение и мотивация.** Примеры однородных функций векторов. Разные виды записи. Векторное произведение как линейный оператор. [Тензор моментов инерции](#).
- 14. Билинейные формы и квадратичные формы.** Задание билинейной формы матрицей. Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Квадратичные формы. Задание квадратичной формы симметричной матрицей.

15. **Канонический вид квадратичной формы.** Изменение матрицы формы при смене базиса. Конгруэнтность матриц и эквивалентность форм. Ранг формы. Метод Лагранжа приведения формы к каноническому виду.
16. **Вещественные квадратичные формы.** Нормальный вид квадратичной формы над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$. Закон инерции для вещественных квадратичных форм. Индексы инерции, сигнатура. Невырожденные формы, (полу)определённые формы. Сужение на подпространство.
17. **Критерий знакоопределённости.** Главные миноры. Определение сигнатуры методом Якоби. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы.

глава 7

18. **Линейные отображения.** Отображения пространств столбцов и матрицы. Выбор базиса. Изоморфизм. Матрица отображения в базисах. Смена базиса и матрица перехода. Закон изменения матрицы отображения.
19. **Структура линейного отображения.** Элементарные матрицы. Простейший вид матрицы отображения. Образ, прообраз, ядро. [Отложенная структурная лемма.](#)
20. **Линейные операторы.** Пространство линейных отображений. Ранг и дефект оператора. Примеры линейных операторов. Проекторы. Инвариантные подпространства. Диагонализуемость.
21. **Диагонализация матрицы оператора.** Собственные числа и векторы. Характеристический многочлен. Характеристические корни. [Экстремумы квадратичной формы на сфере.](#) Примеры вычислений.
22. **Диагонализация матрицы оператора.** Собственные и корневые подпространства. Сумма собственных подпространств. Кратности корня. Критерий диагонализуемости. [Формулировка корневого разложения.](#)
23. **Функции матриц.** Мотивация. Полиномы и суммы рядов. Доказательство теоремы Гамильтона — Кэли. Диагонализация и жорданова форма. Матрицы второго порядка. Формула Сильвестра. [Формула Бухгейма.](#) [Вычищение определителя Вандермонда.](#) [Обращение матрицы Вандермонда.](#)

глава 8

24. **Стандартное евклидово пространство.** Ортонормированные базисы $\mathbb{R}^n$ и ортогональные матрицы. Строение маломерных ортогональных матриц. Диагонализация симметричных матриц. Метод ортогонализации Грама — Шмидта. Разложение вектора по ортонормированной системе. Ортогональное дополнение к подпространству.
25. **Унитарная триангуляция.** Стандартное эрмитово пространство. Ортонормированные базисы $\mathbb{C}^n$ и унитарные матрицы. [Унитарная триангуляция Шура.](#) Эрмитовы матрицы и спектральная теорема. Другие версии спектральной теоремы. [Разложение Холецкого.](#)
26. **Общие евклидовы и эрмитовы пространства.** Стандартное скалярное произведение. Свойства стандартного вырастают в аксиомы общего. Матрица Грама. Неравенство Коши и углы. Объёмы и расстояния.
27. **Нормальные операторы.** Сопряжённый оператор. Спектральная теорема. Спектральные портреты. Канонические виды. [Коммутирующие самосопряжённые операторы.](#)
28. **Разложения операторов и матриц.** Эрмитово разложение оператора. [Алгебраические структуры на операторах.](#) Полярное разложение оператора. [Спектральное разложение нормального оператора.](#) [Функциональное исчисление.](#)

глава 9

29. **Линейная регрессия.** Центрирование данных. Линейная регрессия на плоскости. Линейная регрессия в любой размерности. Зародыш метода наименьших квадратов. Матричное представление линейной регрессии.
30. **Дисперсия, ковариация, корреляция.** Разброс данных и дисперсия. Дисперсия вдоль направления. Ковариация и корреляция. Матрица ковариаций.
31. **Сингулярное разложение.** Предварительный эллипс. Сингулярные числа. Формулировка сингулярного разложения. [Структура линейного отображения.](#) [Доказательство сингулярного разложения.](#) [Сокращённое сингулярное разложение.](#)
32. **Ранговое приближение.** Ранговое разложение и разложение Шмидта. Ранговое приближение Шмидта. Метод главных компонент. Восстановление параметров модели. [Итерационный алгоритм.](#)

- 33. Псевдообратная матрица.** Геометрическое построение псевдообратной. Первое условие псевдообращения. Четыре условия Пенроуза. Метод наименьших квадратов. Минимизация нормы приближённого решения.

глава 10

- 34. Линии в пространстве.** Способы задания. Естественный параметр. Сопровождающий трёхгранник. Движение сопровождающего трёхгранника. Вычисление кривизны и кручения. Особые случаи. **Проекция линии на плоскости трёхгранника.** **Соприкасающаяся окружность.** **Соприкасающаяся сфера.**
- 35. Геометрия на поверхности.** Способы задания. Нормаль и касательная плоскость. Ориентируемость. Первая квадратичная форма. Длины, углы, площади. Смена параметризации.
- 36. Кривизна поверхности.** Геодезическая и нормальная кривизны линии. Геодезические на поверхности. Вторая квадратичная форма. Оператор Родрига. Главные направления и главные кривизны. Средняя и полная кривизна поверхности. Отыскание главных направлений. Типы точек и соприкасающийся параболоид.
- 37. Внутренняя геометрия поверхности.** Изометричность и изгибание. Индексные обозначения. **Деривационные формулы.** **Выражение геодезической кривизны.** Теорема Гаусса о полной кривизне. **Оформление поверхности в пространстве.**
- 38. Абсолютная производная и параллельный перенос.** Векторные поля на поверхности. Абсолютная производная векторного поля. Дифференцирование одного векторного поля вдоль другого. Параллельный перенос на поверхности. Обнесение по контуру и кривизна. Локальная теорема Гаусса — Бонне. Минимизация площади поверхности при заданном крае. Эйлерова характеристика поверхности. Глобальная теорема Гаусса — Бонне.

глава 11

- 39. Примеры разных типов групп.** Определение группы. Группы поворотов плоскости. Группа симметрий прямоугольника. Группа симметрий равностороннего треугольника. Группа перестановок. Конечные группы отражений и поворотов. **Плоские решётки и орнаменты.** **Классические группы матриц.** **Обобщение ортогональных групп.**
- 40. Морфизмы, действия, представления.** Морфизмы групп. Действия групп. Орбиты и стабилизаторы. Действия группы на себе. Матричные представления группы. Группы кос.
- 41. Алгебра кватернионов.** Сфера в четырёх измерениях. Правила Гамильтона. Сопряжение и норма. Чисто мнимые кватернионы. Трёхмерное представление. Вращения трёхмерного пространства. Спинорное накрытие.
- 42. Примеры алгебр математической физики.** Поля и кольца. Алгебры и подалгебры. Классические матричные алгебры Ли. Простая трёхмерная алгебра Ли. **Связь групп Ли и алгебр Ли.** Группа Гейзенберга. **Алгебры Вейля.**
- 43. Алгебры Грассмана.** Внешние формы. Внешняя алгебра трёхмерного пространства. **Внешнее умножение.** Больше миноров.