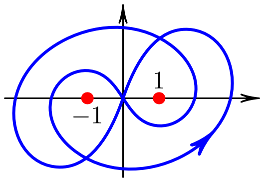
Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 1

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$
где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2y - 2x$. Вычислите интеграл
$$\oint_\gamma \frac{z\,dz}{1 - z^4}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z+1| = 1/2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл
$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$
в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x,y)$, $v(x,y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x,y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x,y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:
$$w_1(z) = 1/z^2; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2),\ \text{где } a > 0.$$

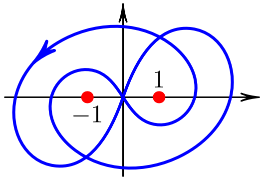
9*. Докажите, что многозначные функции
$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 2

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2x + 2y$. Вычислите интеграл

$$\oint_\gamma \frac{z\,dz}{1 - z^4}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z+1| = 1/2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x,y)$, $v(x,y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x,y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x,y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = 1/z^2; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2), \text{ где } a > 0.$$

9*. Докажите, что многозначные функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$

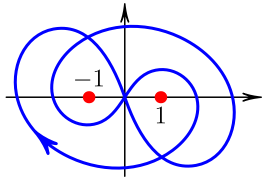
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 3

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2x - 2y$. Вычислите интеграл

$$\oint_{\gamma} \frac{z\,dz}{1 - z^4}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z + 1| = 1/2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\!\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\!\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x, y)$, $v(x, y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x, y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x, y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = 1/z^2; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2),\ \text{где } a > 0.$$

9*. Докажите, что многозначные функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$

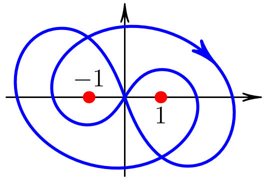
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 4

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2y - 2x$. Вычислите интеграл

$$\oint_\gamma \frac{z\,dz}{z^4 - 1}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z+1| = 1/2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x,y)$, $v(x,y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x,y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x,y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = 1/z^2; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2), \text{ где } a > 0.$$

9*. Доказите, что многозначные функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$

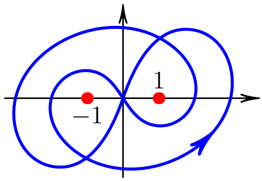
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 5

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2x + 2y$. Вычислите интеграл

$$\oint_\gamma \frac{z\,dz}{z^4 - 1}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z + 1| = {}^1\!/_2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x, y)$, $v(x, y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x, y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x, y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = {}^1\!/_{z^2}; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2),\ \text{где } a > 0.$$

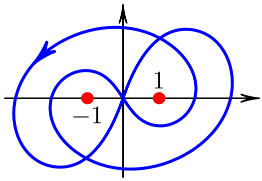
9*. Докажите, что многозначные функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$

взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 6

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что
$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0,$$
где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2x - 2y$. Вычислите интеграл
$$\oint_\gamma \frac{z\, dz}{z^4 - 1}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\frac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z+1| = 1/2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл
$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$
в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x,y)$, $v(x,y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x,y) =$ логарифм якобиана $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x,y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:
$$w_1(z) = 1/z^2; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2), \text{ где } a > 0.$$

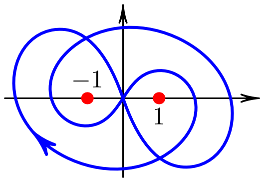
9*. Докажите, что многозначные функции
$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 7

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2y - 2x$. Вычислите интеграл

$$\oint_\gamma \frac{z^2\,dz}{1 - z^4}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z - 1| = {}^1\!/_2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x,y)$, $v(x,y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x,y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x,y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = {}^1\!/_{z^2}; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2), \text{ где } a > 0.$$

9*. Докажите, что многозначные функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$

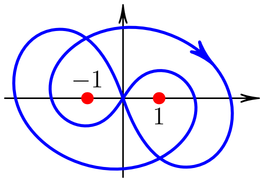
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 8

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2x + 2y$. Вычислите интеграл

$$\oint_\gamma \frac{z^2\,dz}{1 - z^4}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z - 1| = 1/2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x,y)$, $v(x,y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x,y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x,y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = 1/z^2; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2), \text{ где } a > 0.$$

9*. Докажите, что многозначные функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$

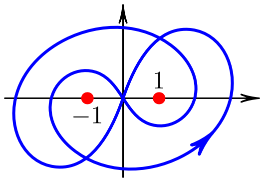
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 9

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2x - 2y$. Вычислите интеграл

$$\oint_\gamma \frac{z^2\,dz}{1 - z^4}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z - 1| = {}^1\!/_2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\!\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\!\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x,y)$, $v(x,y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x,y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x,y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = {}^1\!/_{z^2}; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2), \text{ где } a > 0.$$

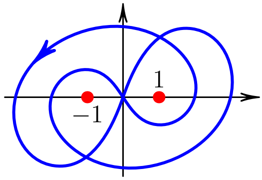
9*. Докажите, что многозначные функции
$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 10

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2y - 2x$. Вычислите интеграл

$$\oint_\gamma \frac{z^2\,dz}{z^4 - 1}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z - 1| = {}^1\!/\!_2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x, y)$, $v(x, y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x, y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x, y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = {}^1\!/\!_{z^2}; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2), \text{ где } a > 0.$$

9*. Докажите, что многозначные функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$

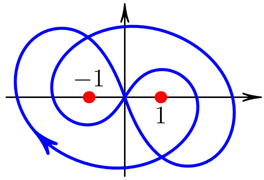
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 11

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2x + 2y$. Вычислите интеграл

$$\oint_\gamma \frac{z^2\,dz}{z^4 - 1}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z - 1| = {}^1\!/_2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\!\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\!\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x, y)$, $v(x, y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x, y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x, y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = {}^1\!/_{z^2}; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2), \text{ где } a > 0.$$

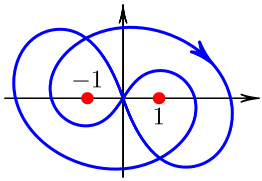
9*. Докажите, что многозначные функции
$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$
взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)

Задание 2 (сдать до 12 ноября)
Вариант 12

1. Однозначная функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости кроме точек $z = \pm 1$. Можно ли утверждать, что

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где γ это гладкая линия, изображённая справа?



2. Линия γ задана уравнением $x^2 + y^2 = 2x - 2y$. Вычислите интеграл

$$\oint_\gamma \frac{z^2\,dz}{z^4 - 1}.$$

3. Вычислите интеграл от функции $\left(\dfrac{z}{\cos 3z}\right)^2$ по окружности $|z - 1| = {}^1\!/_2$.

4. Найдите все вычеты функции $\operatorname{ctg}^3 z$.

5. Для целого $n > 0$ вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$$

в трёх случаях: $1 < |a| < |b|$; $|a| < 1 < |b|$; $|a| < |b| < 1$.

6. Установите однозначность функции $f(z) = z \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right) \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)$ и вычислите интеграл от неё по окружности $|z| = 1$.

7. На области $D \subset \mathbb{C}$ дана пара $u(x, y)$, $v(x, y)$ сопряжённых гармонических функций.

(а) Докажите, что $L(x, y) =$ логарифм якобиана $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ гармоничен.

(б) Укажите сопряжённую к $L(x, y)$ гармоническую функцию.

(в) Укажите множество, на котором выполнены эти свойства.

8. По заданному комплексному потенциалу течения постройте эквипотенциальные линии и линии тока, определите скорость течения $\mathbf{V}$, особые и критические точки, обильность и интенсивность вихреисточников, моменты диполей:

$$w_1(z) = {}^1\!/_{z^2}; \qquad w_2(z) = \ln(z^2 - a^2), \text{ где } a > 0.$$

9*. Докажите, что многозначные функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}, \quad G(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\operatorname{ch}\zeta}$$

взаимно обратны в том смысле, что функция $z \mapsto z$ является однозначной аналитической ветвью функций $F(G(z))$ и $G(F(z))$ на всей комплексной плоскости. (Устранимые особенности заклеиваются.)