Задание 8 (сдать до 7 июня)

1. Найти общий вид линейных операторов, переводящих каждый вектор эвклидова пространства в ему ортогональный.

2. Для каждой положительно определённой эрмитовой матрицы A указать рецепт отыскания:
(a) такой матрицы B, что $B^{\dagger}B = A$;
(b) такой нижнетреугольной матрицы L, что $LL^{\dagger} = A$.

3. Найти кривизну, кручение и вектор Дарбу (угловую скорость поворота сопровождающего трёхгранника) винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \text{ где } a > 0.$$

4. Центральной называют силу $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, коллинеарную радиус-вектору $\mathbf{r}$ и по абсолютной величине зависящую только от $|\mathbf{r}|$. Доказать, что под действием центральной силы точка всегда описывает плоскую траекторию.

5. Найти главные направления и главные кривизны в вершинах поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

6. Для поверхности $z = x^3 - y^3$:
(a) найти полную кривизну во всех точках и определить типы точек;
(b) найти среднюю кривизну и главные кривизны в точках линии $x = y$;
(c) найти главные направления в точке $(x, y) = (1, -1)$.

7. Параболические координаты на плоскости связаны с эвклидовыми соотношениями $x = u^2 - v^2$ и $y = 2uv$, где $-\infty < u < +\infty$ и $0 \leqslant v < +\infty$.
(a) нарисовать координатные линии;
(b) найти компоненты g_{ij} и g^{ij} ковариантного и контравариантного метрического тензора;
(c) найти символы Кристоффеля Γ^k_{ij}.

8. Описать геодезические линии на поверхности $x^2 + y^2 = z^2$.

9. (a) В каждой вершине выпуклого многогранника P сходятся n граней, и все они являются произвольными m-угольниками (не обязательно правильными). Найти количество рёбер P.
(b) Найти все правильные многогранники.

10. Фигура является сечением единичного куба плоскостью.
(a) Описать все возможные группы симметрий такой фигуры.
(b) Дать пример секущей плоскости на каждый тип симметрии.
(c) Указать типы сечений, различных по форме, но обладающих изоморфными группами симметрии.

11. Найти порядок группы вращений:
(a) правильного тетраэдра;
(b) куба;
(c) правильного додекаэдра.

12. Доказать, что множество $\mathbf{O}_n(\mathbb{Z})$ всех целочисленных ортогональных $n \times n$ матриц образует группу относительно умножения. Найти её порядок.

13. Дано множество функций

$$z \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

где z, a, b, c, d это комплексные числа и $ad - bc \neq 0$.
(a) Доказать, что это множество образует группу относительно операции композиции функций.
(b) Каждой матрице $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ сопоставим такую функцию $f(z)$. Будет ли это отображение морфизмом групп? Найти его ядро.

14. Для многочлена f от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 положим

$$\mathrm{Sym}(f) = \big\{\sigma \in \mathbf{S}_4 \bigm| f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\big\}.$$

Доказать, что $\mathrm{Sym}(f)$ — подгруппа в $\mathbf{S}_4$. Найти $\mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4)$.

15. Во всех точках винтовой линии из задачи 3 с целочисленным значением параметра t приложены векторы (магнитные моменты молекул):
(a) $\mathbf{v}(t) = (0, 0, 1)$;
(b) $\mathbf{v}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.
Описать группы симметрии этих систем.

16. Найти все решения уравнения $X^2 + 1 = 0$ в алгебре кватернионов.