Функции матриц

А. П. Ульянов

Новосибирск, апрель 2015 г., июнь 2016 г., июнь 2018 г.

Введение?

Функции матриц находятся на стыке предметов, составляющих основу общематематического образования при подготовке по различным научно-техническим направлениям. Прежде всего это алгебра как источник самих объектов и дифференциальные уравнения как сфера применения матричной экспоненты, но не следует забывать и о разделах математического анализа. Студенты сталкиваются с этой темой на первом курсе; то, что они в ней зачастую получают и из неё выносят, оставляет желать много лучшего, по мнению автора. В частности, у многих остаётся ложное представление, что для вычисления функции матрицы необходима жорданова форма, причём воспоминания о последней отрывочны и неприятны.

1 Обзор определений

Ввиду неоднозначности толкования, всё же уточним, что функцией матрицы мы здесь называем выражение $f(A)$, полученное «подстановкой» матрицы A в аргумент функции $x \mapsto f(x)$ изучаемого в одномерном анализе типа, например, экспоненты, причём случай 1×1 матриц должен совпадать с привычным числовым. Есть несколько внешне сильно отличающихся подходов к определению функций матриц, каждый со своими достоинствами и недостатками. При соблюдении естественных условий все подходы приводят к одинаковым значениям $f(A)$.

Сумма ряда и полиномы

Опираясь на исходно имеющиеся операции сложения и умножения, мы однозначно определим $p(A)$ для любого полинома $p(x)$ непосредственной подстановкой A вместо x. По аналогии с полиномами сделаем подстановку и в функцию, заданную как сумма ряда:

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 0} c_k x^k \quad \Rightarrow \quad f(A) = \sum_{k \geqslant 0} c_k A^k. \tag{1}$$

Возникает вопрос сходимости, но ответ на него несложен: матричный ряд гарантированно сходится, если норма матрицы A меньше радиуса сходимости первоначального ряда для $f(x)$.

Применить это определение для конкретного вычисления $f(A)$ удаётся лишь в простейших случаях, когда структура матрицы позволяет свернуть ряды покомпонентно, например, для матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теорема Гамильтона — Кэли утверждает, что каждая матрица является «корнем» своего характеристического уравнения. Тем самым, для матриц порядка n степень A^n представляется линейной комбинацией низших степеней, иными словами, лежит в их линейной оболочке. Тогда каждая высшая степень тоже лежит в этой оболочке. Поэтому представление $f(A)$ суммой ряда можно заменить на представление полиномом от A степени не выше $n-1$, коэффициенты которого зависят как от f, так и от A, а точнее, от характеристического многочлена.

Ниже в специальном разделе представлено нестандартное изложение полиномиального подхода.

Диагонализация и жорданова форма

Задача о приведении матрицы к диагональному виду, несомненно, одна из важнейших в курсе линейной алгебры. Её легко мотивировать на достаточно элементарном материале, связанном с квадратичными формами: квадратичные линии и поверхности изучают в аналитической геометрии, а задача об условном экстремуме квадратичной формы на сфере удачно вписывается в обсуждение метода множителей Лагранжа в многомерном вещественном анализе. Конечно, матрицы в этом случае симметричны, а потому всегда диагонализируемы.

Естественно отметить лёгкость вычисления функций от диагональной матрицы,

$$D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad \Rightarrow \quad f(D) = \mathrm{diag}\{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\},$$

видимую непосредственно из определения рядом (1). Наблюдение о связи

$$f(ZDZ^{-1}) = Zf(D)Z^{-1}$$

значений функции на подобных матрицах позволяет быстро распространить эту лёгкость на диагонализируемые матрицы. Когда в курсе только что показано, как разложить данную матрицу A в произведение $A = ZDZ^{-1}$, это представляется замечательным методом.

Проблема в том, что работает он не для всех матриц, а модификация, делающая его универсальным (на первый взгляд), не столь безобидна и гораздо труднее мотивируема, особенно если, придерживаясь печального традиционного разделения на предметы, не упоминать тут же системы линейных дифференциальных уравнений. Здесь возникает методический вопрос: насколько глубоко студентам первого курса нужно вникать в теорию жордановой формы и сколько времени тратить на наработку навыка решения игрушечных примеров из задачника?

Для матрицы, не подобной никакой диагональной, ищут блочно-диагональную матрицу J наиболее простого вида, называемую жордановой формой. Каждый диагональный блок порядка выше первого — двухдиагональная ленточная матрица с собственным числом на главной диагонали и единицами на соседней, называемая жордановой клеткой. Заполненные единицами диагонали обычно располагают по одну сторону, чтобы J была треугольной матрицей. Собственные числа в разных клетках могут совпадать, поэтому точный вид жордановой формы матрицы не задаётся одним лишь её спектром. Например, 3×3 матрица с единственным собственным числом λ подобна ровно одной из трёх жордановых форм

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Обозначим их соответственно через $[\lambda]_3$, $[\lambda]_2 \oplus [\lambda]_1$ и $[\lambda]_1 \oplus [\lambda]_1 \oplus [\lambda]_1$.

Для полного рецепта вычисления по формуле

$$f(ZJZ^{-1}) = Zf(J)Z^{-1}$$

не хватает способа отыскания матрицы перехода Z, указывающего заодно точный вид жордановой формы. Обучение ему поглощает значительное учебное время, мало прибавляя для понимания.

Контурный интеграл

Идея «подстановки» матрицы вместо скалярной переменной работает не только для полиномов и рядов. Интегральная формула Коши из комплексного анализа переносится на матрицы:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz \quad \rightsquigarrow \quad f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (zE - A)^{-1} f(z)\, dz.$$

Функция $f(z)$ должна быть аналитической на замкнутой односвязной области комплексной плоскости, ограниченной контуром γ и содержащей спектр матрицы A в своей внутренности.

Помимо изящества, к достоинствам этой формулы нужно отнести переносимость на операторы. Недостатком же является её недоступность при изучении функций матриц на первом курсе.

2 Предельные переходы в фундаментальных матрицах

В этом совершенно не нужном разделе мы сосредоточимся на матричной экспоненте и рассмотрим несколько примеров, знакомящих с решениями систем дифференциальных уравнений.

Систему однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами запишем в матричной форме $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = A\mathbf{y}$. Решением задачи Коши является

$$\mathbf{y}(t) = \exp(At)\mathbf{y}(0),$$

в чём можно убедиться подстановкой ряда (1) для экспоненты. Фундаментальная система решений состоит из столбцов фундаментальной матрицы $Y(t)$; на эту роль годится $\exp(At)$, а также любая матрица, получаемая из неё умножением справа на невырожденную постоянную матрицу. Каждый столбец экспоненты является решением, однако простейший базис пространства решений, как правило, иной.

Отвлёкшись от общего ответа, попробуем найти частное решение в виде $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Подставляя в систему, приходим к хорошо знакомой задаче $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ на собственные числа и векторы. Значит, для диагонализируемой матрицы $A = ZDZ^{-1}$ можно взять $Y(t) = Z\exp(Dt)$. В общем случае, для $A = ZJZ^{-1}$ также можно написать $Y(t) = Z\exp(Jt)$, но мы как раз хотим избежать углубления в жорданову форму, необходимого для отыскания матрицы Z.

Второй порядок

Чтобы пояснить идейный источник последующих примеров, обратимся к решению уравнения колебаний $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ в случае близких корней λ и $\lambda + \delta$ характеристического уравнения. Стандартная фундаментальная система решений, обнаруживаемая методом угадывания, при $\delta \neq 0$ состоит из функций $e^{\lambda t}$ и $e^{(\lambda+\delta)t}$, но при совпадении корней она вырождается и необходимо найти второе решение. Для этого составим линейную комбинацию и перейдём к пределу:

$$\frac{e^{(\lambda+\delta)t} - e^{\lambda t}}{(\lambda+\delta) - \lambda} \to \frac{\partial}{\partial\lambda}\big(e^{\lambda t}\big) = te^{\lambda t}.$$

Можно отметить, что такие комбинации называют **разностными частными**.

Обратимся к вырождениям в системах дифференциальных уравнений $\frac{d}{dt}\mathbf{y} = A\mathbf{y}$ с параметром δ. Важно отметить, что при слиянии собственных чисел система собственных векторов может как вырождаться, так и не вырождаться. Это обстоятельство определяет, диагонализируема ли матрица предельной системы.

Систему с диагональной матрицей решаем просто:

$$A = A_\delta = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+\delta \end{bmatrix}, \qquad Y_\delta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{(\lambda+\delta)t} \end{bmatrix}.$$

Факторизованная форма подчёркивает матрицу Z. Предельный переход при $\delta \to 0$ здесь скучен, ибо Z не вырождается. В наших обозначениях для жордановых форм этот переход запишется как

$$[\lambda]_1 \oplus [\lambda+\delta]_1 \to [\lambda]_1 \oplus [\lambda]_1.$$

Для следующей системы запишем $Z = Z_\delta$ в двух вариантах:

$$A = A_\delta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+\delta \end{bmatrix}, \qquad Z_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \qquad Z_\delta = \begin{bmatrix} 1 & \delta^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Первый вариант нагляднее показывает вырождение при $\delta \to 0$, а второй удобнее для преобразований. Далее, переходя к пределу в экспоненте

$$\exp(A_\delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \delta^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{(\lambda+\delta)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\delta^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta^{-1}(e^{\delta t} - 1) \\ 0 & e^{\delta t} \end{bmatrix} e^{\lambda t} \to \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t},$$

получаем $\exp(A_0 t)$, где и наблюдаем появление множителя t. Матрица перехода Z_0 тут единичная. Тем самым, для жордановых форм засвидетельствовано рождение недиагональной клетки:

$$[\lambda]_1 \oplus [\lambda+\delta]_1 \to [\lambda]_2.$$

Третий порядок

При желании, продолжим в том же духе. В третьем порядке возникают новые возможности: столкновения с недиагональной клеткой. Например, вырождение типа

$$[\lambda]_2 \oplus [\lambda+\delta]_1 \to [\lambda]_3$$

происходит, когда мы берём

$$A_\delta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\delta \end{bmatrix} = Z_\delta J_\delta (Z_\delta)^{-1}, \qquad Z_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta^{-2} \\ 0 & 1 & \delta^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J_\delta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+\delta \end{bmatrix}.$$

Тогда в экспоненте получим

$$\exp(A_\delta t) = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & t & \delta^{-2}(e^{\delta t} - 1 - \delta t) \\ 0 & 1 & \delta^{-1}(e^{\delta t} - 1) \\ 0 & 0 & e^{\delta t} \end{bmatrix} e^{\lambda t} \to \exp(A_0 t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}.$$

Матрица перехода Z_0 тут единичная.

Интересно заметить, что вырождение

$$[\lambda]_2 \oplus [\lambda + \delta]_1 \to [\lambda]_2 \oplus [\lambda]_1$$

тоже может происходить не самым тривиальным образом, сопровождаясь скачком собственного вектора. Действительно, возьмём

$$A_\delta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \delta \end{bmatrix} = Z_\delta J_\delta (Z_\delta)^{-1}, \qquad Z_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J_\delta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \delta \end{bmatrix}.$$

Тогда в экспоненте получим

$$\exp(A_\delta t) = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & t & \delta^{-1}(e^{\delta t} - 1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\delta t} \end{bmatrix} e^{\lambda t} \to \exp(A_0 t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}.$$

Матрицу перехода для разложения $\exp(A_0 t) = Z_0 \exp(J_0 t)(Z_0)^{-1}$ можно взять

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Четвёртый порядок

Примеры четвёртого порядка приносят осознание того, что общая ситуация весьма запутанная. Например, матрицы

$$A_\delta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + \delta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + \delta \end{bmatrix}$$

при $\delta \neq 0$ подобны жордановым матрицам $[\lambda]_2 \oplus [\lambda + \delta]_2$, тогда как A_0 подобна $[\lambda]_3 \oplus [\lambda]_1$.

3 Интерполяция

Здесь я покажу простой и эффективный метод вычисления функций матриц.

Уравнение прямой

Начнём издалека — с простейшей задачи: на плоскости даны две различные точки с координатами (x_0, y_0) и (x_1, y_1), нужно найти уравнение проходящей через них прямой. Школьными методами можно выразить ответ в виде

$$y = y_0 + k \cdot (x - x_0), \text{ где } k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \tag{2}$$

Это, увы, некрасивый ответ. Тот факт, что он непригоден при $x_0 = x_1$, нисколько не важен для дальнейшего. Но почему координаты заданных точек входят несимметрично? Преобразуем формулу к симметричному виду

$$y = y_0 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + y_1 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.$$

Лучше ли это? Не намного. Искомый красивый ответ выражается определителем:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Раскрывая его, получим предыдущее равенство.

Основная идея заметки в том, что не следует раскрывать подобные определители без необходимости и выдавать результаты раскрытия за готовые формулы. Гораздо лучше преподносить и преподавать результаты в виде уравнений *красивый определитель равен нулю.*

Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Возьмём три точки (x_k, y_k) с различными абсциссами и найдём полином наименьшей степени, график которого проходит через них. Его и называют интерполяционным полиномом. Поскольку условий три, то коэффициентов у полинома также должно быть три. Минимальная степень такого полинома — вторая, и среди квадратичных действительно удаётся найти решение.

Чтобы получить его, начнём с частного случая, когда одно из значений y_i равно 1, а остальные равны 0; например, $y_0 = 1$ для определённости. По теореме Безу, решение $P_2(x)$ делится нацело на $x - x_1$ и на $x - x_2$. Поэтому $P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, где коэффициент a находится из условия $P_2(x_0) = 1$. Значит,

$$P_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}.$$

Для произвольных y_0, y_1, y_2 отсюда получим решение

$$P_2(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}.$$

Обобщение этой формулы на произвольное количество контрольных точек называют интерполяционным полиномом в форме Лагранжа. Однако, это некрасивый ответ!

По аналогии с (3), можно преобразовать равенство к виду

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y \\ 1 & x_0 & x_0^2 & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Ответ сразу в таком виде можно получить иначе, в стиле аналитической геометрии: искомая парабола задаётся уравнением вида $A + Bx + Cx^2 + Dy = 0$, а такие задачи быстро решаются выписыванием определителя, где мономы указывают на вид столбцов, а строки, кроме одной, соответствуют подстановкам контрольных точек[1].

Конечно, при большем числе n контрольных точек стандартный вид

$$P_n(x) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \left(y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \tag{5}$$

интерполяционного полинома в форме Лагранжа тоже является раскрытием определителя очень простого устройства, который читатель теперь легко напишет. При этом алгебраическое дополнение элемента y есть определитель Вандермонда, отличный от нуля в точности тогда, когда все x_k различны. Следующая задача — случай совпадающих абсцисс.

Полином Тэйлора

Вернёмся сперва к самой первой задаче с прямой, но изменим условие: теперь дана одна точка (x_0, y_0) и наклон k искомой прямой. Школьное уравнение такое же, а заданный коэффициент k можно интерпретировать как значение производной

$$y_0' = \frac{dy}{dx}(x_0),$$

результат предельного перехода в (2) при $(x_1, y_1) \to (x_0, y_0)$. Если же перейти к пределу в определителе, то мы увидим две одинаковые строки и бесполезное уравнение $0 = 0$. Поэтому вычтем вторую строку из третьей, затем вынесем из разности множитель $x_1 - x_0$. После этого предельный переход даёт уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & 1 & y_0' \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = y_0 + y_0' \cdot (x - x_0).$$

Назовём такие преобразования **конфлюэнтными пределами**, ибо в получаемых здесь и далее матрицах миноры, дополнительные к элементу y, называют конфлюэнтными[2] матрицами Вандермонда.

У нас получилось уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$, правда, привычное лишь в правой форме. Касательная является линейным приближением; следующий шаг — квадратичное приближение. Контрольные данные тут состоят из точки (x_0, y_0), задающей значение $y_0 = y(x_0)$

[1]Это работы Крамера (до 1750 г.), откуда и пошло правило Крамера для решения линейных систем.
[2]Переводы «вырожденный», «совпадающий» несут нежелательные оттенки, поэтому оставим латынь.

функции, вместе со значениями y_0' и y_0'' её первой и второй производных в той же точке. Известный из анализа ответ — полином Тэйлора второй степени:

$$y = y_0 + y_0' \cdot (x - x_0) + y_0'' \cdot \tfrac{1}{2}(x - x_0)^2.$$

Можно проверить, что это выражение получается раскрытием определителя из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y \\ 1 & x_0 & x_0^2 & y_0 \\ 0 & 1 & 2x_0 & y_0' \\ 0 & 0 & 2 & y_0'' \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Строки здесь являются значениями последовательных производных верхней строки в контрольной точке. Определитель можно найти из (4) предельными переходами с такими же трюками, как в предыдущем случае слипания двух контрольных точек, то есть конфлюэнтными пределами. Опустим сейчас эти детали, потому что мы ещё не рассмотрели промежуточную стадию тройного слипания, когда совпали только две точки.

В том же духе, полином Тэйлора

$$y = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(y_0^{(k)} \cdot \tfrac{1}{k!}(x - x_0)^k \right)$$

более высокой степени n получается раскрытием аналогичного определителя порядка $n + 2$. Если индексацию его столбцов начать с $j = 0$, а строк с $i = -1$, то элементы вне верхней строки и последнего столбца описываются общей формулой

$$a_{ij} = \left(\tfrac{d}{dx}\right)^i (x^j)\Big|_{x=x_0},$$

но проще запомнить, что строки есть последовательные производные верхней.

Интерполяция Эрмита

Когда контрольных точек несколько и нужно учитывать значения производных, интерполяционный полином должен сочетать в себе черты обоих крайних своих частных случаев, то есть полинома Лагранжа и полинома Тэйлора. Эта тема не входит в начальные курсы анализа или алгебры, видимо, вследствие общепринятого мнения о громоздкости ответа, но при излагаемом здесь подходе она вполне доступна; кроме того, она пригодится ниже для достижения заявленной цели.

Простейшая гибридная ситуация возникает с двумя контрольными точками (x_0, y_0) и (x_1, y_1), когда задано также значение производной $y_1' = y'(x_1)$. Возьмём определитель в (4) и устремим $x_2 \to x_1$. Конфлюэнтный предел даёт уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y \\ 1 & x_0 & x_0^2 & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 0 & 1 & 2x_1 & y_1' \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

При $x_0 \neq x_1$ отсюда можно выразить y, но не нужно: обобщать лучше именно в свёрнутом виде.

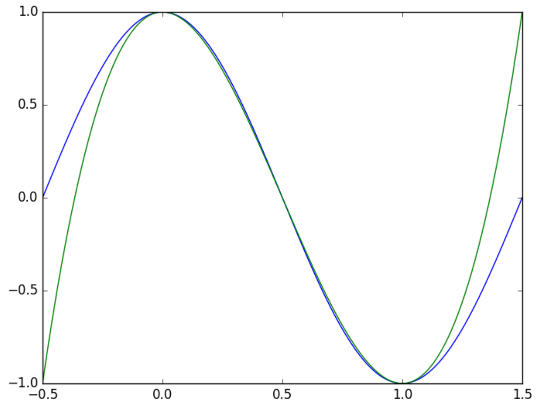
Если устремить $x_1 \to x_0$, то после необходимых конфлюэнтных преобразований определителя из (7) в пределе получим (6). Тут формулы на допредельной стадии (пока лишь для y_0'') посложнее уже обсуждавшихся и известны главным образом в разностном исчислении; однако они не нужны, поскольку общий результат предсказуем и ясен. Проверку в этом случае оставим читателю.

Теперь, надеюсь, мы можем сразу писать ответы для более сложных случаев интерполяции Эрмита. Например, когда заданы контрольные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) вместе со значениями y_0' и y_0'', получим уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & y \\ 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & y_0 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & y_0' \\ 0 & 0 & 2 & 6x_0 & y_0'' \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

а когда в этих же точках заданы значения y_0' и y_1', получим уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & y \\ 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & y_0 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & y_0' \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & y_1' \end{vmatrix} = 0.$$



Во всех случаях алгебраическое дополнение элемента y отлично от нуля, если все x_k различны.

Упражнение 1. *Найдите полином минимальной степени, требуя, чтобы в точках $x = 0$ и $x = 1$ его значения и первые производные были как у функции $\cos(\pi x)$.*

Формулы Сильвестра и Бухгейма[3]

Основная идея всего метода — идея Сильвестра — в том, что значения функции матрицы интерполируют её значения на спектре этой матрицы. Именно эту идею и следует запомнить. Вместе с ней подход к интерполяции через определители приносит простейший способ вычисления функций матрицы, включая матричную экспоненту.

Возьмём квадратную матрицу A с различными собственными числами λ_k. В этом случае говорят, что матрица имеет **простой спектр**. Формула Сильвестра выражает значение $f(A)$ хорошей функции на такой матрице как линейную комбинацию

$$f(A) = \sum f(\lambda_k) A_k, \text{ где } A_k = \prod_{i \neq k} \frac{A - \lambda_i E}{\lambda_k - \lambda_i}.$$

Функция хорошая, если она определена на спектре A. Матрицы A_k называют ковариантами Фробениуса. В них можно распознать слагаемые интерполяционной формулы Лагранжа (5) с подстановкой λ_k в x_k и матрицы A в переменную x. Поскольку мы ранее переписали формулу Лагранжа через определитель, поступим так и с матричной версией, ограничившись трёхмерным случаем:

$$\begin{vmatrix} 1 & A & A^2 & f(A) \\ 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & f(\lambda_0) \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & f(\lambda_2) \end{vmatrix} = 0.$$

В частности, для матричной экспоненты получаем простую формулу

$$\begin{vmatrix} 1 & A & A^2 & \exp(At) \\ 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \exp(\lambda_0 t) \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \exp(\lambda_1 t) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \exp(\lambda_2 t) \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

пригодную для непосредственных вычислений.

Упражнение 2. *Выразите явно $\exp(At)$ для матриц с заданными простыми спектрами:*

$$\{1, -1\}; \quad \{i, -i\}; \quad \{\alpha + i\beta, \alpha - i\beta\}; \quad \{1, 0, -1\}; \quad \{1, i, -i\}; \quad \{1, -1, i, -i\}.$$

Упражнение 3. *В третьем случае предыдущего упражнения перейдите к пределу при $\beta \to 0$.*

Если спектр не простой, то есть матрица имеет кратные собственные числа, то для вычисления хороших функций от неё вместо интерполяции Лагранжа нужно использовать интерполяцию

[3] Arthur Buchheim (1859–1888), `https://nickhigham.wordpress.com/2013/01/31/arthur-buchheim/`

Эрмита. Ожидаемо, от функции теперь требуется существование всех используемых производных. Например, для матриц со спектром $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2$ адаптируем уравнение (7) и видим

$$\begin{vmatrix} 1 & A & A^2 & \exp(At) \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \exp(\lambda_1 t) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \exp(\lambda_2 t) \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 & t\exp(\lambda_2 t) \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Здесь нужно обратить внимание на появление множителя t перед экспонентой в последней строке. Источник его в том, что при переходе от (8) к конфлюэнтному пределу (9) берётся производная от $\exp(\lambda t)$ по λ, ведь в наших новых переменных именно λ переняла роль буквы x.

Вычищение определителя

Как мы увидели выше, тактика воздержания от раскрытия определителя позволяет выписать простое уравнение для функции матрицы с известным спектром. Больше того, она оказывается выгодна и при практических вычислениях, особенно с вырожденным спектром. В случае простого спектра формула Сильвестра в раскрытом виде весьма эффективна, хотя комплексно-сопряжённые пары корней несколько портят картину.

Огромное преимущество свёрнутой общей формулы заключается, естественно, в возможности упрощения числового определителя — алгебраического дополнения искомой $f(A)$. Поскольку он не вырожден, его всегда можно свести к единичной матрице путём элементарных преобразований строк и/или столбцов окаймлённой матрицы, после чего ответ считывается непосредственно из верхней строки (полиномов от A) и последнего столбца (функций на спектре).

Пример. Найдём e^{At} для матрицы A со спектром $\{i, -i, i, -i\}$. Уже в начале преобразований полезно положить $c = \cos t$ и $s = \sin t$. Запишем исходный определитель интерполяции Эрмита, опустим (оставим читателю в качестве упражнения) элементарные преобразования окаймлённой матрицы и приведём только финальный результат её вычищения:

$$\begin{vmatrix} E & A & A^2 & A^3 & X \\ 1 & i & -1 & -i & e^{it} \\ 0 & 1 & 2i & -3 & te^{it} \\ 1 & -i & -1 & i & e^{-it} \\ 0 & 1 & -2i & -3 & te^{-it} \end{vmatrix} = 0 \quad \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \quad \begin{vmatrix} E & A & A^2+E & A^3+A & X \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ts/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (s-tc)/2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда считываем ответ

$$X = e^{At} = E\cos t + A\sin t + \tfrac{1}{2}(A^2+E)t\sin t + \tfrac{1}{2}(A^3+A)(\sin t - t\cos t).$$

Если при вычищении ограничиться преобразованиями строк, то ответ запишется в виде линейной комбинации степеней A^k. Наоборот, вычищая по столбцам, сразу получим линейную комбинацию значений функции и её производных.

Упражнение 4. *Найдите e^{At} для матрицы A с единственным собственным числом λ, причём соберите вместе одинаковые степени t. Размер n матрицы любой, но начните с $n = 3$.*

Обращение матрицы Вандермонда

При вычищении определителя могут появляться неудобные длинные выражения в строке матриц и в столбце функций. Избежать их можно, решив уравнение в общем виде, причём это возможно и без полного раскрытия. Источником аналогии тут служит вычисление

$$\begin{vmatrix} a & x \\ v & f \end{vmatrix} = af - xv = 0 \quad \Rightarrow \quad x = av^{-1}f.$$

Порядок сомножителей важен, ибо у нас вместо a формальная строка из степеней матрицы A, вместо f столбец значений f на спектре, а вместо v матрица Вандермонда с учётом конфлюэнтных модификаций. Поразмыслив над процессом вычищения определителя, заключаем, что

$$\begin{vmatrix} A^{\bullet} & X \\ V & F_{\bullet} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = A^{\bullet}V^{-1}F_{\bullet}.$$

Таким образом, суть вычисления — обращение матрицы V.

Здесь можно пытаться продвинуться дальше. Если вести речь о больших матрицах, то полезно знать, что особая структура матрицы Вандермонда упрощает и ускоряет её обращение; есть даже готовые формулы, покрывающие и конфлюэнтный случай. Однако алгоритм нестабилен вблизи сливающихся собственных чисел.

4 Интерполяция в иной форме

Разностные частные

Начав с функции $f(x)$, её разностное частное, по воле Ньютона, строят как

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \text{ при } x_1 \neq x_2.$$

Для хорошей функции разрыв устраним значением $f'(x_1)$. Полученную непрерывную функцию двух переменных обычно обозначают при помощи квадратных скобочек, то есть через $f[x_1, x_2]$. Укрепляя базу, также пишут $f[x]$ вместо $f(x)$. Экономя место, опускают символ функции.

Считая начальную функцию достаточно гладкой, можно продолжить процесс:

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}, \tag{10}$$

и так далее (по индукции, если угодно). При слиянии всех трёх точек x_i получают предельное значение $f''(x_1)/2$. При полном слиянии $n+1$ точки получают предельное значение $f^{(n)}(x_1)/n!$.

Упражнение 5. *Запишите разностное частное любого порядка в виде отношения двух определителей. Ответ напоминает формулу Крамера, а в знаменателе стоит матрица Вандермонда.*

Формула из упражнения показывает в частности, что всякое разностное частное $f[x_1, \ldots, x_k]$ является симметрической функцией своих аргументов. Кроме того, оно наводит на мысль, что разностные частные тоже должны появиться при знакомстве с матричной экспонентой. Рассмотрим теперь, как это могло бы происходить. А решение упражнения приведено ниже.

Пси-функции

По заданному упорядоченному набору чисел $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ построим базис $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ пространства решений линейного дифференциального уравнения $Ly(t) = 0$ с оператором

$$L = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\tfrac{d}{dt} - \lambda_k\right)$$

тремя равносильными способами. Связь с матрицами далее устанавливается благодаря возможности перехода от уравнения порядка n к системе n уравнений первого порядка и наоборот.

Первый способ. Последовательно решаем следующие задачи Коши:

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{d}{dt} - \lambda_1\right)\psi_1 = 0, && \psi_1(0) = 1; \\ &\left(\tfrac{d}{dt} - \lambda_k\right)\psi_k = \psi_{k-1}, && \psi_k(0) = 0 \text{ для } k > 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Эти формулы позволяют легко вычислить определитель Вронского для искомого набора функций и таким образом убедиться в их независимости.

Второй способ. Помним явные формулы, решающие эти задачи Коши:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= e^{\lambda_1 t}, \\ \psi_k(t) &= \int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} \psi_{k-1}(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Третий способ. Однажды обнаруживаем, эмоционально закрепляем и затем естественным образом помним, что ψ_k является разностным частным экспоненциальной функции $\lambda \mapsto e^{\lambda t}$. Проверим это, исходя из второго способа введения пси-функций. База индукции для ψ_1 очевидна. Считая интеграл для ψ_2 в предположении $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получим искомое

$$\psi_2(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

а при $\lambda_1 = \lambda_2$ увидим $\psi_2(t) = te^{\lambda_1 t}$, то есть $\psi_2 = \psi_1[\lambda_1, \lambda_2]$. На следующем шаге $2 \to 3$ можно пользоваться шагом $1 \to 2$, просто подставляя вместо каждой экспоненты разностное частное:

$$\psi_3(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\Big(\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_3 t}}{\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_3 t}}{\lambda_2 - \lambda_3}\Big).$$

Это в точности $\psi_1[\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2]$, и остаётся переставить аргументы, пользуясь симметричностью. Аналогично совершается шаг индукции $k \mapsto k+1$.

Непрерывная зависимость базиса от корней

Из определения базиса $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ вытекает его непрерывная зависимость от исходного набора чисел $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. В первом способе можно перейти к векторной формулировке задачи, $\frac{d}{dt}\Psi = B\Psi$ с неизвестным вектором $[\psi_1, \dots, \psi_n]^\top$ и двухдиагональной матрицей вида (здесь для $n = 4$)

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_4 \end{bmatrix},$$

и сослаться на теорему о непрерывной зависимости решения от параметров. Во втором способе непрерывность всех ψ_k следует из бесконечной гладкости экспоненты.

Стандартный базис пространства решений, состоящий из функций вида $t^r e^{\lambda_k t}$ и используемый при выражении решения системы $\frac{d}{dt}Y = AY$ через жорданов базис для A, свойством непрерывности не обладает. Поэтому базис из разностных частных принципиально лучше.

Упражнение 6. *Для последней матрицы B убедитесь, что элемент матрицы e^{Bt} в строке i и столбце $j \leqslant i$ равен разностному частному $\psi_1[\lambda_j, \dots, \lambda_i]$. Таким образом обобщается известная формула для экспоненты от жордановой клетки.*

Интерполяционный полином в форме Ньютона

Возьмём теперь квадратную матрицу A с известным спектром. Перенумеровав его, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, введём разностные частные $\psi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ и $\psi_k(t) = \psi_1[\lambda_1, \dots, \lambda_k]$ как выше. Убедимся в том, что

$$e^{At} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \psi_k(t) P_k(A), \quad \text{где} \quad P_k(A) = \prod_{1 \leqslant j < k} (A - \lambda_j E). \tag{12}$$

Для этого проверяем, что сумма — обозначим её через $\Phi(t)$ — удовлетворяет матричной задаче Коши $\frac{d}{dt}\Phi = A\Phi$ с начальным условием $\Phi(0) = E$. Нужно взять $\frac{d}{dt}\Phi(t)$, заменить производные по формулам 11 и собрать ψ_k перегруппировкой. Ключевой момент ждёт в конце суммы. Для $n = 3$:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \psi_1' \cdot E + \psi_2' \cdot (A - \lambda_1 E) + \psi_3' \cdot (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) \\ &= \lambda_1 \psi_1 \cdot E + (\psi_1 + \lambda_2 \psi_2) \cdot (A - \lambda_1 E) + (\psi_2 + \lambda_3 \psi_3) \cdot (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) \\ &= \psi_1 \cdot A + \psi_2 \cdot A(A - \lambda_1 E) + \psi_3 \cdot A(A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) - \psi_3 \cdot (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E)(A - \lambda_3 E) \\ &= A\Phi(t) - \psi_3(t) \cdot P_3(A). \end{aligned}$$

Выделенное слагаемое равно нулю по теореме Гамильтона — Кэли: всякая матрица обнуляет свой характеристический полином.

Тем самым выяснена связь разностных частных и матричной экспоненты. Остаётся замкнуть круг, посмотрев на заголовки. Ньютон использовал разностные частные, чтобы ввести интерполяционный полином. Глядя внимательно на формулу 12, полезно опознать в ней интерполяционный полином в форме Ньютона и версии «вперёд». Тут дело, конечно, не в экспоненте; формула годна для всех достаточно гладких функций.

Разностные частные как отношения альтернантов

Здесь будем опускать символ исходной функции, считая её заданной: $[x]$ означает $f(x)$. Перепишем первые шаги рекурсивного определения 10 разностных частных через определители:

$$\begin{vmatrix} 1 & [x_1] \\ 1 & [x_2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot [x_1, x_2], \qquad \begin{vmatrix} 1 & [x_1, x_2] \\ 1 & [x_2, x_3] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \cdot [x_1, x_2, x_3].$$

В качестве промежуточной остановки, указывающей путь к обобщению, можно выписать

$$\begin{vmatrix} 1 & [x_1] \\ 0 & [x_2] - [x_1] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} \cdot \frac{[x_2] - [x_1]}{x_2 - x_1}.$$

В третьем порядке такими же операциями на строках получим

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & [x_1] \\ 1 & x_2 & [x_2] \\ 1 & x_3 & [x_3] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & [x_1] \\ 0 & x_2 - x_1 & [x_2] - [x_1] \\ 0 & x_3 - x_1 & [x_3] - [x_1] \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_1) \end{matrix} \right\} \cdot \begin{vmatrix} 1 & [x_1, x_2] \\ 1 & [x_1, x_3] \end{vmatrix},$$

где выносимые из определителя множители удобно написать столбиком. Преобразуя правую часть, вынесем ещё $x_3 - x_2$, затем свернём вынесенное в определитель Вандермонда V. Значит,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & [x_1] \\ 1 & x_2 & [x_2] \\ 1 & x_3 & [x_3] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} \cdot [x_1, x_2, x_3] = V(x_1, x_2, x_3) \cdot [x_1, x_2, x_3]. \tag{13}$$

В четвёртом порядке возникает новый момент, который стоит упомянуть, чтобы не осталось подвохов при переходе к общему случаю. После вычищения первого столбца и раскрытия по нему вынесем множители $x_k - x_1$ и увидим лишние слагаемые во втором столбце:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & [x_2] - [x_1] \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & [x_3] - [x_1] \\ x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1^2 & [x_4] - [x_1] \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_1) \\ (x_4 - x_1) \end{matrix} \right\} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & [x_1, x_2] \\ 1 & x_3 + x_1 & [x_1, x_3] \\ 1 & x_4 + x_1 & [x_1, x_4] \end{vmatrix}.$$

Они устраняются вычитанием первого столбца, помноженного на x_1. При более высоких порядках такое упрощение делается во всех столбцах, кроме первого и последнего. В последнем же столбце превращения повторяют рекурсию разностных частных, поэтому аналог формулы 13 верен для любого количества переменных.

Пси-функции как отношения альтернантов

Симметричность пси-функций можно установить независимо от общих разностных частных, привлекая дифференциальные уравнения 11. Убедимся в равенствах вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & e^{\lambda_2 t} \\ 1 & \lambda_3 & e^{\lambda_3 t} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot \psi_3(t),$$

проверив соотношения $\frac{d}{dt}\psi_k(t) - \lambda_k \psi_k(t) = \psi_{k-1}(t)$ для заданных таким образом функций:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_3 e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_3 e^{\lambda_2 t} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & (\lambda_1 - \lambda_3) e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & (\lambda_2 - \lambda_3) e^{\lambda_2 t} \\ 1 & \lambda_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 - \lambda_3 & (\lambda_1 - \lambda_3) e^{\lambda_1 t} \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_3 & (\lambda_2 - \lambda_3) e^{\lambda_2 t} \\ 1 & \lambda_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (\lambda_1 - \lambda_3) \\ (\lambda_2 - \lambda_3) \end{matrix} \right\} \cdot \begin{vmatrix} 1 & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot \psi_2(t).$$

Замечание выше про упрощение столбцов в более высоких порядках действует и здесь. Кроме того, приходится отследить верность знаков при понижении размера определителя раскрытием и сворачивании множителей в определитель Вандермонда.

Полные симметрические функции

Изучим разностные частные степенной функции, положив $[x] = x^n$. При небольших показателях, натуральных разумеется, замечаем для $[x_1, x_2]$ простое правило:

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} &= h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \\ \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2} &= h_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \\ \frac{x_1^4 - x_2^4}{x_1 - x_2} &= h_3(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_3^3. \end{aligned}$$

Возникающий однородный полином h_k является суммой всех мономов степени k и называется полной симметрической функцией. Очевидно, при дефиците букв имеем $h_n(x_1) = x_1^n = [x_1]$.

Затем можно выписать следующий шаг:

$$\begin{aligned} \frac{h_2(x_1, x_2) - h_2(x_2, x_3)}{x_1 - x_3} &= h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \\ \frac{h_3(x_1, x_2) - h_3(x_2, x_3)}{x_1 - x_3} &= h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2. \end{aligned}$$

Ух ты! Мы опять видим полные симметрические функции, только аргументов у них стало больше.

Упражнение 7. *Разностные частные степенной функции $[x] = x^n$ являются полными симметрическими функциями:*

$$[x_1, \ldots, x_s] = \begin{cases} h_{n-s+1}(x_1, \ldots, x_s) & \text{при } s \leqslant n, \\ 0 & \text{при } s > n. \end{cases}$$

Пси-функции как суммы рядов

Из представления экспоненты рядом Тэйлора легко найти аналогичное представление её разностного частного:

$$\psi_2(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{t^k}{k!} = \sum_{k\geqslant 1} h_{k-1}(\lambda_1, \lambda_2)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k\geqslant 0} h_k(\lambda_1, \lambda_2)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Зная уже поведение полных симметрических функций, без проблем выписываем следующий шаг и даже общую формулу (которая будет чуть лучше, если нумерацию собственных чисел начать с λ_0):

$$\psi_3(t) = \sum_{k\geqslant 0} h_k(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\frac{t^{k+2}}{(k+2)!},$$

$$\psi_s(t) = \sum_{k\geqslant 0} h_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)\frac{t^{k+s-1}}{(k+s-1)!}.$$

Отсюда сразу вытекает симметричность пси-функций и почти сразу их непрерывность по λ_i. Есть кратные собственные числа, или нет их — безразлично.