

Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН
ул. Институтская, 4/1, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: valera@itam.nsc.ru

ЗАМКНУТАЯ ЗАДАЧА ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПРИМЕРЕ СФЕРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

В точной электродинамической постановке без использования малого параметра решена задача об осесимметричном излучении сферической антенны под действием сторонней ЭДС. Решение содержит как распределение тока по антенне, так и все характеристики поля излучения.

Ключевые слова: поля излучения, полная интенсивность излучения, поля мультиполей, собственные частоты, сферические функции Ганкеля, присоединенные функции Лежандра.

В строгой электродинамической постановке задача излучения любой антенны под действием внешних электродвижущих сил (ЭДС) заключается в одновременном определении как тока в его элементах, так и возбуждаемой антенной электромагнитной волны. Однако в курсах общей электродинамики (см., например, [1; 2]), рассматривая так называемые вибраторные антенны, распределение тока по антенне, по сути, задается, а затем по известному току находят поле излучения и другие электрические параметры антенны.

На самом деле подобная возможность расщепления общей задачи излучения проволочных антенн на две последовательно решаемые задачи является результатом работы Леонтовича, Левина [3], опубликованной впервые в 1944 г. В ней применительно к тонкому вибратору, снабженному распределенной или сосредоточенной сторонней ЭДС, задача излучения сведена к интегродифференциальному уравнению для тока. Решение получено по методу возмущения с использованием малого параметра, связанного с отношением поперечного размера вибратора к длине волны. А используемые ныне в теории вибраторных антенн распределения тока по антенне представляют собой главный член разложения решения ин-

тегродифференциального уравнения Леонтовича.

В связи со сказанным методический интерес представляют математическая формулировка замкнутой задачи излучения и ее решение для простейшей антенны. Этому вопросу посвящена данная работа.

Рассмотрим антенну, составленную из двух полусфер с радиусом R , на узкий зазор между которыми от внешнего источника подается возбуждающее напряжение, не зависящее от азимутального угла α . В математической формулировке задачи работу внешнего источника будем моделировать заданным на сфере сторонним полем

$$\vec{E}_{\text{стр}} = E_{\text{стр}} \mathbf{e}^{-i\omega t} \vec{e}_\theta,$$

локализованным в узком круговом поясе вблизи координаты $\theta = \pi/2$, причем сфера рассматривается как целая. Конкретные вычисления проведем для случая

$$E_{\text{стр}} \mathbf{e} \rightrightarrows E_0 \delta(\cos\theta) \mathbf{e} \quad (1)$$

Задача сводится к определению в пространстве $r > R$ осесимметричных полей

$$E \mathbf{e}(\theta) \rightrightarrows E_r \mathbf{e}(\theta) \vec{e}_r + E_\theta \mathbf{e}(\theta) \vec{e}_\theta, \quad (2)$$

$$\vec{B} \mathbf{e}(\theta) \rightrightarrows B \mathbf{e}(\theta) \vec{e}_\alpha, \quad (3)$$

удовлетворяющих уравнениям Максвелла

$$\text{rot} \vec{E} = \frac{i\omega}{c} \vec{B}, \quad \text{rot} \vec{B} = \frac{i\omega}{c} \vec{E}, \quad (4)$$

граничному условию на сфере

$$E_\theta(\mathbf{r}, \theta) \Big|_{r=R} = E_{\text{ср}}(\theta) \quad (5)$$

и условию излучения.

Решение задачи строится с помощью векторных мультиполей [1], являющихся частными решениями уравнений Максвелла. В рассматриваемом осесимметричном случае поля полностью определяются одной скалярной функцией $B(\mathbf{r}, \theta)$ из (3), поэтому процесс получения мультиполей здесь наметим кратко. Начнем с уравнения для поля $B(\mathbf{r}, \theta)$:

$$\text{rot rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, \theta) \Big|_{r=R} = \mathbf{e}_\alpha \frac{1}{c^2} \ddot{B}(\mathbf{r}, \theta) \Big|_{r=R},$$

вытекающего из системы (4), которое после раскрытия векторных операций приобретает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rB) + k^2 B + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B) \right] = 0,$$

отличающийся от волнового уравнения. Фундаментальный набор решений этого однородного уравнения составляют мультипликативные функции

$$h_l^1(\xi) P_l^1(\cos \theta) \quad \xi = kr, \quad z = \cos \theta \quad (l = 1, 2, 3, \dots)$$

где $h_l^1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \left[J_{l+\frac{1}{2}}(\xi) + iN_{l+\frac{1}{2}}(\xi) \right]$ – так на-

зываемые сферические функции Ганкеля, на бесконечности обладающие нужной асимптотикой

$$h_l^1(\xi) \approx (-i)^{l+1} \frac{\exp(i\xi)}{\xi}, \quad P_l^1(\xi) = -(-x^2)^{l/2} \frac{dP_l(\xi)}{dx} \quad (6)$$

присоединенные функции Лежандра (P_l – полиномы Лежандра), составляющие бесконечный полный набор функций, ортогональных на интервале $[-1, 1]$, причем

$$\int_{-1}^1 P_l^1(\xi) P_l^1(\xi) dx = \frac{2}{(l+1)(-1)!} \delta_{ll'}. \quad (7)$$

Таким образом, произведения

$$h_l^1(\xi) P_l^1(\cos \theta)$$

($l = 1, 2, 3, \dots$) составляют искомые решения для поля $B_\alpha(\mathbf{r}, \theta)$. Соответствующие электрические поля (2) определяются из второго уравнения системы (4). С использованием нормирующего множителя

$$b_l = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(-1)!}{(l+1)!}} \quad (8)$$

поля осесимметричного векторного мультиполя с номером l ($l = 1, 2, 3, \dots$) представим в следующем виде:

$$B_l(\mathbf{r}, \theta) = b_l h_l^1(\xi) P_l^1(\cos \theta) \quad (9)$$

$$E_{lr}(\mathbf{r}, \theta) = -b_l \frac{i}{\xi} l(l+1) h_l^1(\xi) P_l^1(\cos \theta) \quad (10)$$

$$E_{l\theta}(\mathbf{r}, \theta) = -b_l \frac{i}{\xi} \frac{d}{d\xi} (h_l^1(\xi) P_l^1(\cos \theta)) \quad (11)$$

Здесь выражение для E_{lr} выписано с учетом соотношения (6). Отсюда видно, что угловая зависимость r -компоненты электрического поля выражается полиномом Лежандра, в то время как E_θ, B_α зависят от θ как $P_l^1(\cos \theta)$.

Отметим следующие свойства полей (9)–(11):

а) усредненная по времени угловая интенсивность излучения рассматриваемого l -поля равна

$$\left\langle \frac{dJ_l}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} r^2 |B_l|^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{R^2}{\xi^{\circ 2}} b_l^2 |P_l^1(\cos \theta)|^2,$$

б) полная интенсивность

$$\langle J_l \rangle = 2\pi \int_0^\pi \left\langle \frac{dJ_l}{d\Omega} \right\rangle \sin \theta d\theta$$

с учетом условия ортогональности (7) принимает значение

$$\langle J_l \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{R^2}{\xi^{\circ 2}}.$$

В последних формулах использовано обозначение

$$\xi^\circ = kR = \mathbf{e}/c R.$$

Решение рассматриваемой задачи (1), (4), (5) строится в виде ряда из мультиполей. Интересующие нас компоненты полей представим в виде

$$B_\alpha(\mathbf{r}, \theta) = \sum_{l=1}^\infty D_l b_l h_l^1(\xi) P_l^1(\cos \theta) \quad (13)$$

$$E_\theta(\mathbf{r}, \theta) = -\frac{i}{\xi} \sum_{l=1}^\infty D_l b_l \frac{d}{d\xi} (h_l^1(\xi) P_l^1(\cos \theta)) \quad (14)$$

Для упрощения записи здесь и далее использовано обозначение $h_l^1(\xi)$ вместо $h_l^1(\xi) P_l^1(\cos \theta)$. Коэффициенты разложения D_l определяются из граничного условия (5)

$$\frac{i}{\xi} \sum_{l=1}^\infty D_l b_l \frac{d}{d\xi} (h_l^1(\xi) P_l^1(\cos \theta)) \Big|_{r=R} = E_{\text{ср}}(\cos \theta)$$

откуда с учетом условия ортогональности (7) в рассматриваемом частном случае $E_{\text{ср}}(\xi) = E_0 \delta(\xi)$ получаем

$$D_l \frac{d}{d\xi} \langle h_l \rangle_{\xi} = -2\pi i \xi^\circ b_l E_0 P_l^1 \langle \cdot \rangle \quad (15)$$

Коэффициенты b_l определены формулой (8). Множитель при D_l из последнего выражения с помощью известных [1] рекуррентных формул для сферических функций Ганкеля можно записать в виде

$$\frac{d}{d\xi} \langle h_l \rangle_{\xi} = \xi h_{l-1} \langle \cdot \rangle - l h_l \langle \cdot \rangle \quad (16)$$

Из соотношения (6) имеем

$$P_l^1 \langle \cdot \rangle = -d P_l / dx \langle \cdot \rangle,$$

следовательно, в решениях (13), (14) только нечетные члены отличны от нуля. Воспользовавшись соотношениями (15), (16), эти ненулевые коэффициенты можно представить в виде

$$D_{2n+1} = 2\pi E_0 d_n \langle \cdot \rangle, \quad (17)$$

$$d_n = - \frac{i \xi^\circ b_{2n+1} P_{2n+1}^1 \langle \cdot \rangle}{\xi^\circ h_{2n+1} \langle \cdot \rangle - \langle n+1 \rangle h_{2n+1} \langle \cdot \rangle}$$

Полная интенсивность излучения антенны на основании свойства (7) равна сумме интенсивностей мультиполей и, как следствие, соотношений (12), (13),

$$\langle J \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{R^2}{\xi^{\circ 2}} \sum_{l=1}^{\infty} |D_l|^2 = \frac{c\pi}{2\xi^{\circ 2}} \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} |d_n \langle \cdot \rangle|^2. \quad (18)$$

Угловая интенсивность учитывает интерференцию и определяется выражением

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} r^2 |B_\alpha \langle \cdot, \theta \rangle|_{r \rightarrow \infty}^2 = \frac{c\pi}{2\xi^{\circ 2}} \varepsilon^2 \times \left| \sum_{n=0}^{\infty} d_n \langle \cdot \rangle b_{2n+1} \langle 1 \rangle^{2n+1} P_{2n+1}^1 \langle \cos \theta \rangle \right|^2. \quad (19)$$

В выражениях (18), (19) символ ε означает величину сторонней ЭДС $\varepsilon = E_0 R$.

Наконец, искомая поверхностная плотность тока на сфере, выражаемая через магнитное поле (13), равна

$$i_\theta \langle \cos \theta \rangle = - \frac{cE_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \langle \cdot \rangle b_{2n+1} h_{2n+1} \langle \cdot \rangle P_{2n+1}^1 \langle \cos \theta \rangle \quad (20)$$

Анализ полученного решения связан с вычислением коэффициентов d_n . При этом входящие в (17) сферические функции Ганкеля вычисляются по известным [1] рекуррентным формулам, а в качестве $P_{2n+1}^1 \langle \cdot \rangle$ можно использовать значения

$$P_{2n+1}^1 \langle \cdot \rangle = \langle 1 \rangle^{2n+1} \frac{\langle n+1 \rangle!}{\langle n \rangle!} \quad (\text{при } n \geq 1),$$

$$P_1^1 \langle \cdot \rangle = -1,$$

получающиеся из рекуррентных соотношений для присоединенных функций Лежандра.

Для предельного случая $\xi^\circ = kR \ll 1$, когда радиус сферы намного меньше длины волны, можно воспользоваться асимптотическим представлением

$$h_l \approx \frac{\xi^{\circ l}}{\langle l+1 \rangle!} - \frac{\langle l-1 \rangle!}{\xi^{\circ l+1}},$$

сохранив в нем наряду с главной мнимой составляющей и малую вещественную добавку. Тогда для интересующих нас величин получаются значения

$$|d_n \langle \cdot \rangle|^2 = \left(\frac{b_{2n+1} P_{2n+1}^1 \langle \cdot \rangle}{\langle n+1 \rangle! \langle n+1 \rangle} \right)^2 \xi^{\circ 4n+6},$$

откуда видно, что в излучении участвует практически только мультиполь с номером $l = 1$ (диполь), с суммарной интенсивностью

$$\langle J \rangle = \langle 16 \rangle \varepsilon^2 \langle R \rangle^4,$$

пропорциональной ω^4 (при фиксированной амплитуде приложенной ЭДС). Для плотности тока на сфере при этом из формулы (20) получается выражение

$$i_\theta \langle \cos \theta \rangle = \frac{cE_0}{2} \xi^\circ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\xi^{\circ 4n+3}}{\langle n+1 \rangle \langle n+1 \rangle!} - \frac{i}{2n+1} \right] \times \langle 2n+1 \rangle P_{2n+1}^1 \langle P_{2n+1}^1 \langle \cos \theta \rangle \rangle$$

Отсюда, как и следовало ожидать, видно, что $Re i_\theta$ фактически определяется первым членом выписанного ряда. Для Jmi_θ ряд сходится медленно, а в точке $\cos \theta = 0$ даже расходится. Эта особенность в функции $Jmi_\theta \langle \cdot \rangle$, не имеющая физических последствий, связана с модельным представлением $E_{стр} \langle \cdot \rangle$ через дельта-функцию. Это нетрудно увидеть, подставив в граничное условие (5) вместо E_θ соответствующее выражение, получающееся из второго уравнения системы (4). В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} \langle JmB_\alpha \rangle_{r=R} = -\xi^\circ E_0 \delta \langle \cos \theta \rangle$$

Отсюда видно, что мнимая часть комплексной амплитуды поля B_α (следовательно, и соответствующая часть функции $i_\theta(\theta)$) име-

ют особенность в точке $\theta = \pi/2$, причем независимо от величины ξ° . Еще раз подчеркнем, что эта особенность имеет искусственное происхождение.

При анализе результатов для конечных ξ° нам понадобятся собственные значения параметра $\xi^\circ = \mathcal{O}/cR$, связанные с собственными частотами рассматриваемых осесимметричных мод колебаний поля вне сферы. Собственными являются значения параметра ξ° , при которых существуют нетривиальные решения (11), удовлетворяющие однородным условиям $E_\theta \mathcal{O}, \theta \mathcal{O} = 0$. Следовательно, для любого фиксированного $l = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) искомый набор собственных значений ξ° составляют корни алгебраического уравнения.

$$\frac{d}{d\xi} \mathcal{O} h_l \mathcal{O} \mathcal{O} = 0.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение $(l + 1)$ -й степени относительно переменной $1/\xi^\circ$ с чисто мнимыми коэффициентами при четных и вещественными коэффициентами при нечетных степенях $1/\xi^\circ$. Таким образом, если некоторое комплексное число $x - iy$ является корнем уравнения, то число $-(x - iy)^* = -x - iy$ также является корнем. Отсюда следует, что из всех $2(n + 1)$ корней половина, т. е. $n + 1$ корней, имеют физический смысл, так как им соответствуют частоты $\omega' + i\omega''$ с положительными вещественными и отрицательными мнимыми частями. Найденные для нескольких первых мультиполей $l = 2n + 1$ собственные значения с положительными вещественными частями вместе с логарифмическим декрементом затухания $\beta = 2\pi\omega''/\omega'$ представлены в таблице:

n	l	Собственные значения	β
0	1	$(1/2)(\sqrt{3} - i) = 0,866 - 0,5 i$	3,63
1	3	0,871 - 2,16 i	15,6
		2,758 - 0,843 i	1,92
2	5	0,8689 - 3,544 i	25,6
		2,644 - 2,908 i	6,91
		4,676 - 1,048 i	1,41
3	7	6,610 - 1,201 i	1,14
4	9	8,553 - 1,327 i	0,97
5	11	10,50 - 1,434 i	0,86

Для $n = 0, 1, 2$ здесь приведены все $n + 1$ собственные значения, а для $n = 3, 4, 5$ — только корни с наибольшими вещественными частями, которые к тому же обладают наименьшими значениями декремента затухания. Именно эти собственные значения с наименьшим для каждого n декрементом затухания отметим как ξ_n° , а их вещественные части $Re\xi_n^\circ$ обозначим через ξ_n . Они будут использованы при интерпретации результатов вычислений, поэтому их значения здесь в виде таблицы еще раз повторим:

n	0	1	2	3	4	5
ξ_n	0,866	2,76	4,68	6,61	8,55	10,5

Вычисления проведены для интервала $0 \leq \xi^\circ \leq 4\pi$, где максимальное значение $\xi^\circ = kR = 4\pi$ соответствует радиусу сферы, вдвое превышающему длину волны. Результаты расчетов представлены графически. На рис. 1 изображены зависимости $|d_n \mathcal{O}|$ для номеров от $n = 0$ до $n = 8$, вносящих учитываемый вклад в излучение для рассматриваемого интервала параметра ξ° . Видно, что при $\xi^\circ \ll 1$ излучение определяется лишь одним коэффициентом $d_0 \mathcal{O}$, как отмечалось выше. При увеличении ξ° в излучение начинают вносить вклад мультиполи с более высокими номерами. Например, при $\xi^\circ = \pi$ уже равноценны мультиполи с номерами $l = 1$ и $l = 3$ (диполь и октуполь). Заметим, что при любом ξ° на интенсивность излучения рассматриваемой антенны заметное влияние оказывает только ограниченное число мультиполей. Так, в рассматриваемом интервале ξ° мы учитываем номера от $n = 0$ до $n = 8$.

Безразмерная суммарная интенсивность излучения, т. е. функция

$$J = \frac{\langle J \rangle}{\sqrt{2} \pi \epsilon^2} = \frac{1}{\xi^{\circ 2}} \sum_{n=0}^8 |d_n \mathcal{O}|^2$$

представлена на рис. 2. Здесь, как и на двух следующих графиках, штриховыми линиями указаны положения оговоренных выше собственных значений ξ° для первых мультиполей с номерами от $n = 0$ до $n = 5$.

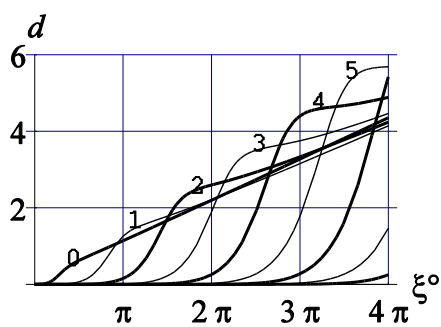


Рис. 1

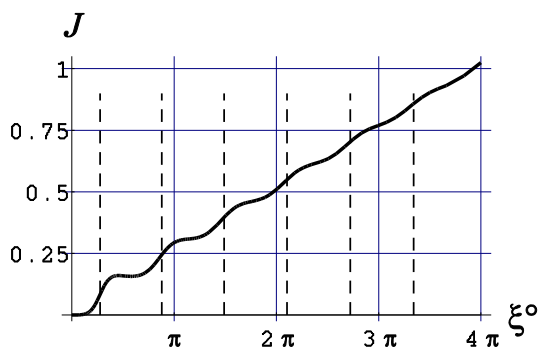


Рис. 2

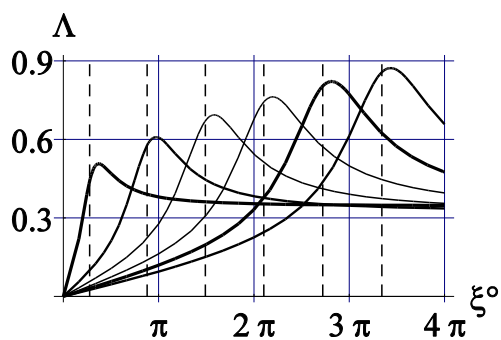


Рис. 3

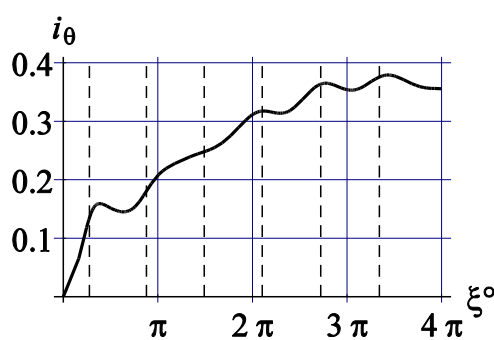


Рис. 4

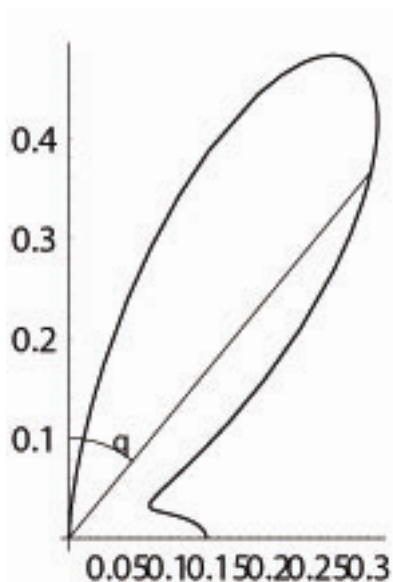


Рис. 5

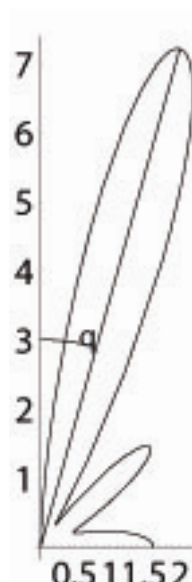


Рис. 6

Из графика видно, что интенсивность излучения с увеличением частоты увеличивается почти монотонно. Здесь нет явных резонансных пиков, соответствующих собствен-

ным колебаниям поля шара, что объясняется их большими значениями логарифмического декремента затухания. Небольшие волнообразные возмущения хода кривой $J(\xi_0)$

согласуются с положениями собственных частот – в том смысле, что каждой собственной частоте соответствует локально наибольшее значение производной $dJ/d\xi^\circ$.

Обратимся к току на сфере, задаваемому выражением (20). Отсюда видно, что каждому мультиполю соответствует стоячая волна тока, распределенная по сфере пропорционально $P_l^1(\cos\theta)$ с амплитудой, определяемой произведением

$$\Lambda_n(\xi^\circ) \approx d_n(\xi^\circ) h_{2n+1}^1(\xi^\circ)$$

Так как $\Lambda_n(\xi^\circ)$ – величина комплексная, каждая стоячая волна характеризуется своей начальной фазой, поэтому суммарная плотность тока (20) не представляет стоячей волны. Относительный вес каждого мультиполя в распределении тока по сфере характеризуют функции $|\Lambda_n(\xi^\circ)|$, представленные на рис. 3 (в виде $\Lambda_n(\xi^\circ)$, номера $n = 0, \dots, 5$ на графиках не проставлены).

Каждая из них имеет четко выраженный максимум, находящийся вблизи соответствующей собственной частоты. Таким образом, в распределении тока по сфере резонансные частоты проявляют себя достаточно четко, хотя в результате суммирования по мультиполям эта четкость ослабляется, как видно из рис. 4. Здесь модуль комплексной амплитуды безразмерной плотности тока в точке $\theta_0 = \pi/2 + \pi/10$, т. е.

$$i_{\theta_0}(\xi^\circ) = \left| \sum_{n=0}^8 d_n(\xi^\circ) h_{2n+1}^1(\xi^\circ) P_{2n+1}^1(\cos\theta_0) \right|$$

представлена как функция от ξ° . Угол θ_0 взят немного в стороне от места приложения сторонней ЭДС, чтобы избежать искус-

ственной трудности, о которой говорилось выше.

Наконец, влияние высших мультиполей на угловую интенсивность излучения проиллюстрируем диаграммами направленности рассматриваемой антенны.

Как отмечалось выше, при $\xi^\circ = \pi$ равноправное участие в излучении принимают мультиполи с номерами $l = 1, l = 3$, а при $\xi^\circ = 1,5\pi$, как видно из рис. 1, равноценны уже три мультиполя. Соответствующим образом это отражается на диаграммах направленности, представленных на рис. 5 ($\xi^\circ = \pi$) и 6 ($\xi^\circ = 1,5\pi$) для полусферы $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Список литературы

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
2. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1987. Ч. 2: Электромагнитные волны и оптика.
3. Леонтович М. А. Избр. тр. Теоретическая физика. М.: Наука, 1985.

Материал поступил в редколлегию 23.03.2009

V. I. Yakovlev

THE EXACT SOLUTION OF THE ELECTRODYNAMIC WAVE RADIATION PROBLEM IN THE CASE OF A SPHERICAL ANTENNA.

The axially symmetric radiation solution for a spherical antenna is obtained using complete electrodynamic statement of the problem. The distributions of current over the antenna and all characteristics of the radiation field are presented and discussed.

Keywords: multipole fields, resonance frequencies, spherical Hankel functions, associated Legendre functions.